TP : durée de vie sans vieillissement, loi exponentielle

Durée de vie sans vieillissement

La durée de vie d'un certain appareil depuis sa fabrication est une variable aléatoire X dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^+$.

Explicitation de la notion

On dit que la durée de vie d'un appareil est sans vieillissement ou sans mémoire lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore au moins t_1 heures ne dépend que de t_1 et aucunement du temps t_0 durant lequel il a déjà fonctionné (c'est en général le cas pour les composants électroniques).

1. Étude d'un exemple
   Pour un matériel dont la durée de vie X est supposée sans vieillissement :
   a. Justifier que $P_{\{X\geqslant 90\}}(X \geqslant 150) = P(X \geqslant 60)$.
   b. En déduire une relation entre $P(X \geqslant 150)$, $P(X \geqslant 90)$ et $P(X \geqslant 60)$.
2. Traduction dans le cas général
   Montrer que la durée de vie X d'un appareil est sans vieillissement si et seulement si sa loi de probabilité P vérifie la propriété H suivante :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \forall t_1 \in \mathbb{R}^+, P(X \geqslant t_0 + t_1) = P(X \geqslant t_0) \times P(X \geqslant t_1)$$

Cas d'une durée de vie de loi exponentielle

On suppose que la durée de vie X d'un appareil suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Démontrer que cette durée de vie est sans vieillissement.

Loi d'une durée de vie sans vieillissement

On suppose maintenant que la durée de vie X d'un appareil est sans vieillissement et on se propose de voir quelle peut être la densité f de la loi de probabilité de X. Pour cela, on considère la fonction R définie sur $\mathbb{R}^+$ par $R(x) = P(X \geqslant x)$.

1. Interpréter et calculer $R(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} R(x)$. (R est appelée fonction de fiabilité ou de survie de l'appareil).
2. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $R(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt$. En déduire que la fonction R est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $R'(x)$.
3. Démontrer que pour tous réels positifs a et b on a $R(a+b) = R(a) \times R(b)$. En déduire qu'il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $R(x) = e^{\alpha x}$.
4. Démontrer que $\alpha < 0$. On pose alors $\alpha = -\lambda$ avec $\lambda > 0$, comment s'écrit $R(x)$?
5. Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$, que peut-on en conclure pour la loi d'une durée de vie sans vieillissement ?