PLANCHE 2 : dérivabilité

Exercice 1 : Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ , } g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$

Exercice 2 : Méthode d'Euler

Soit f une fonction dérivable telle que $f(1) = 0$ et $f'(x) = \sqrt{x}$.

1. Soit a un réel positif, écrire l'approximation affine de f en a.
2. En déduire une valeur approchée de $f(1,5)$, puis de $f(2)$.
3. Construire un algorithme permettant de préparer la programmation d'une calculatrice pour la détermination d'une valeur approchée de $f(4)$.
4. On peut en fait démontrer que f est définie par $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}$, calculer alors la valeur exacte de $f(4)$.

Exercice 3 : Méthode de Newton

On se propose dans cet exercice de mettre en oeuvre une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.
   a. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   b. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0\,;\vec{i},\vec{j})$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Démontrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ puis que α vérifie la relation :
$$1 - \alpha = \alpha^3$$
3. On considère un point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse a. La tangente en A à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point B d'abscisse b.
   a. Démontrer que :
$$b = \frac{2a^3 + 1}{3a^2 + 1}$$
   b. Soit M_1 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_1 = 1$. La tangente à $\mathcal{C}$ en M_1 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2. La tangente au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_2 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_3. En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) de nombres réels. Calculer les valeurs de x_1, x_2 et x_3.
   c. On suppose que l'on a construit le point d'abscisse x_n. Démontrer alors que :
$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} \text{ pour tout entier } n$$
4. Dans cette question, on se propose de démontrer que la suite (x_n) est convergente. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - \alpha$.
   a. Démontrer que $\phi(\alpha) = 0$.
   b. Démontrer que ϕ est strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
   c. Démontrer que pour tout entier n non nul :
$$x_{n+1} - \alpha = \frac{\phi(x_n)}{3x_n^2 + 1}$$
   d. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n > \alpha$.
   e. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(x_n - x_{n+1})$ en fonction de x_n, et en déduire que $x_{n+1} < x_n$.
   f. Démontrer que la suite (x_n) converge vers α.
5. À l'aide d'une calculatrice, calculer des valeurs approchées de x_1, x_2, ... , x_{10}.