Chapitre 1

Éléments de logique et techniques de raisonnement

1.1 Propositions

1.1.1 Non, et, ou

Définition 1.1 *Une proposition mathématique est un énoncé qui est soit vrai, soit faux (valeur de vérité).*

Exemples : "2 est un entier naturel pair", "$\frac{1}{3}$ est un nombre décimal", "je suis un homme".

Définition 1.2 *Soit P une proposition, la proposition contraire de P, notée non P, est la proposition qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie.*

Exemple : Soient x et y deux nombres réels et P la proposition $x \leqslant y$, non P signifie non $(x \leqslant y)$ que l'on écrira $x > y$.

N.B : Dans la mesure du possible, on évite les énoncés contenant "non". On écrira "2 est pair" plutôt que "non (2 est impair)".

Table de vérité :

P	V	F
non P	F	V

N.B : non (non P) signifie P.

Définition 1.3 *Soient P et Q deux propositions, P est vraie et Q est vraie (simultanément) s'écrit "P et Q".*

(P et Q) est vraie lorsque P est vraie et Q est vraie, i.e : lorsque P et Q sont simultanément vraies et seulement dans ce cas.

Définition 1.4 *Soient P et Q deux propositions, P est vraie ou Q est vraie s'écrit "P ou Q".*

(P ou Q) est vraie lorsque l'une des deux propositions P ou Q, au moins, est vraie, et seulement dans ce cas.

♠ Le "ou" mathématique est inclusif, i.e : (P ou Q) est vraie également lorsque P est vraie et Q est vraie. Ce qui est différent avec ce que l'on rencontre dans le langage courant ("tu prends les blancs ou les noirs ?").

Table de vérité :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P et Q	V	F	F	F
P ou Q	V	V	V	F

N.B :
non (P et Q) signifie "P est fausse ou Q est fausse", i.e : (non P ou non Q).
non (P ou Q) signifie "P est fausse et Q est fausse", i.e : (non P et non Q).

1.1.2 Implication

Définition 1.5 *Soient P et Q deux propositions, on définit une nouvelle proposition notée "$P \Rightarrow Q$" de la façon suivante :*

$$(P \Rightarrow Q) \text{ est vraie si } \begin{cases} P \text{ vraie et } Q \text{ vraie} \\ P \text{ fausse et } Q \text{ vraie} \\ P \text{ fausse et } Q \text{ fausse} \end{cases}$$

$(P \Rightarrow Q)$ est fausse si (P vraie et Q fausse).

Finalement, $(P \Rightarrow Q)$ est définie par (P fausse ou Q vraie).

N.B :

1. Il est impératif que Q soit vraie quand P l'est pour que $(P \Rightarrow Q)$ soit vraie elle aussi.
2. Quand P est fausse, $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

Exemples :

$(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$ $\qquad$ $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 5)$

$(2 = 2) \Rightarrow (3 = 4)$ $\qquad$ $(1 = 2) \Rightarrow$ "je suis le pape"

"je suis le pape" $\Rightarrow (1 = 1)$

♠ Remarquons que $(P \Rightarrow Q)$ vraie signifie exactement "si Q est fausse alors P est fausse" (puisque si P était vraie, Q le serait aussi).

Table de vérité :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \Rightarrow Q$	V	F	V	V
non P ou Q	V	F	V	V
$Q \Rightarrow P$	V	V	F	V
non $(P \Rightarrow Q)$	F	V	F	F

Définition 1.6 *$(Q \Rightarrow P)$ est l'implication réciproque de $(P \Rightarrow Q)$.*

♠ **Négation de** $P \Rightarrow Q$: non $(P \Rightarrow Q)$ est non ((non P) ou Q), soit P et (non Q).
La négation de $(P \Rightarrow Q)$ ne s'écrit donc pas avec le symbole $\Rightarrow$.

Exemples : théorème de Pythagore, $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$.

Définition 1.7 *La proposition (non $Q \Rightarrow$ non P) est appelée contraposée de $P \Rightarrow Q$.*

1.1.3 Condition nécessaire, condition suffisante

Définition 1.8 *Dire qu'une condition est nécessaire signifie que le résultat est vrai seulement si la condition est satisfaite.*

Exemples : $x \neq 0$ est une condition nécessaire (CN) pour avoir $x > 0$. En revanche, $x = 2$ n'est pas une condition nécessaire pour avoir $x^2 = 4$.

Définition 1.9 *Une condition est suffisante si, lorsqu'elle satisfaite, le résultat considéré est vrai.*

Exemple : $x = 2$ est une condition suffisante (CS) pour avoir $x^2 = 4$.

N.B :
CS satisfaite $\Rightarrow$ résultat vrai
résultat vrai $\Rightarrow$ CN satisfaite

1.1.4 Équivalence et CNS

Définition 1.10 *Soient P et Q deux propositions, on définit une nouvelle proposition $P \Leftrightarrow Q$ par :*
$P \Leftrightarrow$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Cela signifie que P et Q ont même valeur de vérité, on dit qu'elles sont équivalentes.
P est alors une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour obtenir Q.

N.B : Q est également une CNS pour obtenir P.

On peut formuler une condition nécessaire et suffisante de différentes façons : "si, et seulement si"; "ssi"; "équivaut à"; "il faut et il suffit"; "c'est à dire".

1.2 Quantificateurs

Définition 1.11 *On retrouvera dans des propositions mathématiques les symboles suivants, appelés quantificateurs :*
$\forall$ *"quel que soit", "pour tout".*
$\exists$ *"il existe", sous-entendu "au moins un".*
$\exists!$ *"il existe exactement un" ou "il existe un unique" ou "il existe un seul".*

Exemples : Soit x un nombre réel
$\forall x < 0, x^2 \geqslant 0$
$\exists x < 0, x^2 \geqslant 0$
$\exists x < 0, x^2 < 0$
$\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, x < y$
♠ De façon générale, il n'est pas permis de mélanger le symbolisme mathématique avec les phrases en français.

Propriété 1.1 *La négation d'une proposition contenant des quantificateurs s'obtient en appliquant deux règles :*
1. échanger $\forall$ et $\exists$
2. nier la proposition finale.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x \geqslant y$.

N.B : on retrouve ces règles dans la notion de contre-exemple.

♠ Dans une proposition, l'ordre des quantificateurs est important.
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, x.y = 1$
$\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}, x.y = 1$

1.3 Raisonnements

Soient P et Q deux propositions.

1.3.1 Démontrer $P \Rightarrow Q$

1. Raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie (le plus courant).
2. Raisonnement par contraposition : on suppose que non Q est vraie et on démontre que non P est vraie (c.f plus haut).
3. Raisonnement par l'absurde : pour démontrer un résultat par l'absurde, on suppose que ce résultat est faux et on démontre que l'on obtient une contradiction.

Si l'on veut démontrer que $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que $P \Rightarrow Q$ est fausse et démontrer que l'on obtient une contradiction, i.e : supposer que (P et non Q) est vraie et aboutir à une contradiction.

♠ Ce raisonnement est différent du raisonnement par contraposition.

1.3.2 Démontrer $P \Leftrightarrow Q$

1. $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
2. $P \Rightarrow Q$ et (non P) $\Rightarrow$ $(nonQ)$.

1.3.3 Raisonnement par récurrence

Rédaction : Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ vraie.
Initialisation : $P(n_0)$ vraie, en effet : ...
Hérédité : soit $n \geqslant n_0$, supposons $p(n)$ vraie, ..., donc $P(n+1)$ vraie.
Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on conclut par récurrence que : $\forall n \geqslant n_0, P(n)$.

Il s'agit ci-dessus de la récurrence faible, il existe un raisonnement légérement modifié, la récurrence forte :
Dans certains cas on peut avoir besoin de $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n-1), P(n)$ pour démontrer $P(n+1)$. Le principe est le même que pour la récurrence faible, seul l'hérédité diffère.

Rédaction :
Hérédité : soit $n \geqslant n_0$, supposons $P(n_0), \dots, P(n)$ vraies, ..., donc $P(n+1)$ vraie.

1.3.4 Récurrence à deux pas

Il peut y avoir des cas deans lesquels les deux hypothèses $P(n)$ et $P(n+1)$ sont nécessaires pour démontrer $P(n+2)$.

Rédaction :

Initialisation : $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ vraies.

Hérédité : soit $n \geqslant n_0$, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies, ..., donc $P(n+2)$ vraie.

Conclusion : la propriété étant initialisée et héréditaire, on conclut par récurrence que : $\forall n \geqslant n_0, P(n)$.

N.B : on utilise la récurrence quand la propriété à démontrer dépend d'un entier.

Chapitre 2

Nombres réels

2.1 Les ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, on écrit $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, on écrit $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, on a : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$ et $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant 0\}$.
Tout élément appartenant à $\mathbb{R}$ et n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ est appelé irrationnel ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ signifie que $\sqrt{2}$ est un irrationnel).
Enfin, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\} \text{ avec } i^2 = -1$$

Exemples :
0, 1, 2 sont des entiers naturels.
-3, -2, 6 sont des entiers relatifs.
$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, -1, 2 sont des nombres rationnels.
π, $\sqrt{2}$, e sont des nombres irrationnels.
Enfin, $1 + i$, $j = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ sont des nombres complexes.

N.B : on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notation : soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$, on note :

$$[\![p; q]\!] = \{p, p+1, p+2, \ldots, q-1, q\}$$

2.2 Opérations dans $\mathbb{R}$

2.2.1 Addition

Soient a, b et c trois réels, on a :

$$\begin{cases} a + b = b + a & \text{(commutativité)} \\ (a + b) + c = a + (b + c) & \text{(associativité)} \end{cases}$$

On dit que l'addition des nombres réels est commutative et associative.

Lorsque l'on travaille sur des sommes il est courant d'utiliser la notation $\sum$:

Définition 2.1 *Soient p et q deux entiers naturels avec $p \leqslant q$ et soient $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_q$ des nombres réels. On pose :*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \underbrace{a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q}_{\textit{écriture en extension}}$$

N.B :
• l'indice k dans cette expression est une variable muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre à condition que celle-ci ne soit pas déjà utilisée.
• si $p > q$ alors par convention $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$.

Exemples :

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\cdots+10 \qquad\qquad \sum_{k=1}^{10} a = 10a$$

$$\sum_{j=1}^{10} 2 = \underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{10 \text{ fois}} = 20 \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

N.B : Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition permettent parfois de grandes simplifications dans les calculs (en changeant l'ordre des termes et en les regroupant de façon judicieuse).

2.2.2 Multiplication

Soient a, b et c trois réels, on a :

$$\begin{cases} a \times b = b \times a & \text{(commutativité)} \\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c) & \text{(associativité)} \end{cases}$$

i.e : la multiplication des réels est aussi commutative et associative.

Propriété 2.1 *Soient a et b deux réels, on a :*

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

C'est la propriété d'intégrité de $\mathbb{R}$, on dit aussi que $\mathbb{R}$ est intègre.

De la même façon que pour les sommes, il existe la notation $\prod$ qui permet de calculer avec les produits :

Définition 2.2 *Soient p et q deux entiers naturels avec $p \leqslant q$ et soient $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_q$ des nombres réels. On pose :*

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \underbrace{a_p \times a_{p+1} \times a_{p+2} \times \cdots \times a_q}_{\text{écriture en extension}} = a_p a_{p+1} \ldots a_q$$

N.B : si $p > q$ alors par convention on pose $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$.

Définition 2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$.*
$n!$ se lit n factorielle ou factorielle n.

N.B :
• $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
• On peut changer l'ordre des facteurs ou les regrouper pour faciliter les calculs.

Enfin, en considérant l'addition et la multiplication des réels, il vient la propriété suivante :

Propriété 2.2 *Soient a, b et c trois réels, on a :*

$$\begin{cases} a \times (b+c) = a \times b + a \times c & \textit{(distributivité à gauche)} \\ (a+b) \times c = a \times c + b \times c) & \textit{(distributivité à droite)} \end{cases}$$

C'est la distributivité de la multiplication sur l'addition des nombres réels.

2.2.3 Règles de calculs sur les quotients

Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec b et d non nuls, on a :
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ si $c \neq 0$

2.2.4 Règles de calcul sur les puissances, cas d'un exposant entier relatif

Soient a et b deux réels et p, q deux entiers relatifs. On a :

1. Si $p > 0$ alors $a^p = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{p \text{ fois}}$
2. $\forall a \in \mathbb{R}^*, a^0 = 1$ convention
3. Si $p < 0$ et $a \neq$ alors $a^p = \frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{a \times a \times \cdots \times a}$
4. $(a^p)^q = a^{p \times q}$
5. $a^p \times a^q = a^{p+q}$
6. $(a \times b)^p = a^p \times b^p$
7. Si $a \neq 0$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
8. Si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} = a^p b^{-p}$

2.2.5 Puissances quelconques de réels strictement positifs

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 2.4 *On pose* $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

N.B :
- Si a et b sont deux réels strictment positifs alors les règle de calcul de 4. sont valides avec p et q réels quelconques.
- La fonction, qui pour $a \neq 1$, est définie pour $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'appelle fonction exponentielle de base a.

2.3 Identités et binôme de Newton

2.3.1 Rappels

♡ Soient a et b deux nombres réels, on a les relations suivantes (identités remarquables) :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Propriété 2.3 ♡ *Soient a et b deux réels et n un entier naturel, on a la relation suivante :*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \textit{(Égalité de Bernoulli)}$$

preuve : faite en cours.

Cas particulier ♡ : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

2.3.2 Binôme de Newton

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble fini à n éléments (i.e : de cardinal n).
Soit p un entier naturel.
On rappelle qu'une combinaison de E à p éléments est une partie de E contenant p éléments. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et nous avons :
- si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$.
- si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Propriétés :

1. $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
4. $\displaystyle\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

preuves : faites en cours.

Formule de Pascal : Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

preuve : faite en TD.

Triangle de Pascal :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Formule du binôme de Newton :
Soient a et b deux réels et n un entier naturel, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

preuve : faite en TD.

Chapitre 3

Éléments de théorie des ensembles

3.1 Ensembles, sous-ensemble, élément

On ne définit pas dans ce cours la notion d'ensemble, on retiendra simplement qu'un ensemble est défini dès que l'on sait préciser quels sont ses éléments.

Définition 3.1 *Un ensemble E est constitué d'éléments x dont on dit qu'ils appartiennent à E. On écrit $x \in E$.*

N.B : On peut décrire un ensemble en dressant la liste de tous ses éléments : $E = \{0; 1; 2; 3\}$, on dit que E est défini en extension. Une autre façon de décrire E est de donner une propriété qui caractérise tous les éléments de E, par exemple : $E = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leqslant n \leqslant 3\}$, il s'agit d'une définition en compréhension.

Définition 3.2 *On dit que deux ensembles E et F sont égaux et l'on écrit $E = F$ si E et F ont les mêmes éléments.*

N.B :
Dans la définition en compréhension d'un ensemble, la lettre qui représente un élément est une variable muette, par exemple : $E = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leqslant n \leqslant 3\} = \{z \in \mathbb{N}; 0 \leqslant z \leqslant 3\} = \{a \in \mathbb{N}; 0 \leqslant a \leqslant 3\}$.
Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'ensemble vide, il est noté $\varnothing$.

Définition 3.3 *Soit A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B ou que A est un sous-ensemble de B si tout élément appartenant à A appartient à B. Notation : $A \subset B$.*

N.B :
La notation $A \subset B$ se lit "A est inclus dans B" ou "A est un sous-ensemble de B" ou encore "A est une partie de B".

Propriété 3.1 *Nous admettrons que les sous-ensembles d'un ensemble E forment un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$.*

On prendra garde aux notations employées, en effet, $A \subset E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ signifient la même chose, i.e : A sous-ensemble de E mais le symbole "$\subset$" s'emploie quand A est décrit en tant qu'ensemble inclus dans E et le symbole "$\in$" s'emploie quand A est décrit en tant qu'élément de $\mathcal{P}(E)$.

Attention : $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide (même si E est vide), il contient toujours au moins $\varnothing$. $\varnothing$ est la partie vide de E et E est la partie pleine de E.

Propriété 3.2 *Soient A, B et C trois ensembles. Si A est un sous-ensemble de B et si B est un sous-ensemble de C alors A est un sous-ensemble de C (transitivité). Ce que l'on peut écrire :*

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

preuve : faite en cours.

Théorème 3.3 *Soient A et B deux ensembles.*

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

preuve : faite en cours.

Définition 3.4 *Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, i.e :*

$$\complement_E(A) = \{x \in E; x \notin A\}$$

N.B : Quand il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble E, on peut noter $\bar{A}$ au lieu de $\complement_E(A)$.

3.2 Opérations sur les ensembles

3.2.1 Intersection et réunion

Dans tout ce paragraphe on note E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

Définition 3.5 *Soient A et B deux sous-ensembles de E.*
La réunion de A et B est l'ensemble des éléments de E appartenant à l'un au moins des ensembles A ou B. On note $A \cup B$ la réunion de A et B et on lit "A union B".
On a :

$$A \cup B = \{x \in E ; x \in A \textit{ ou } x \in B\}$$

L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments de E communs à A et à B. On note $A \cap B$ l'intersection de A et B et on lit "A inter B".
On a :

$$A \cap B = \{x \in E ; x \in A \textit{ et } x \in B\}$$

On dit que deux ensembles sont disjoints si leur intersection est vide.
Si A_1, A_2, ...,A_n sont des sous-ensembles de E, on dit que les A_i, $i \in [\![1;n]\!]$ sont deux à deux disjoints si $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Remarques-notations :
Si A_1, A_2, ...,A_n sont des sous-ensembles de E, on peut définir la réunion et l'intersection des A_i, $i \in [\![1;n]\!]$ par :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E ; \exists i \in [\![1;n]\!], x \in A_i\} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E ; \forall i \in [\![1;n]\!], x \in A_i\}$$

La réunion des A_i est l'ensemble des éléments de E appartenant à l'un au moins des A_i et l'intersection des A_i est l'ensemble des éléments de E communs à tous les A_i.

Propriété 3.4 *La réunion et l'intersection sont associatives et commutatives, c'est à dire :*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ *(associativité de la réunion)*
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ *(associativité de l'intersection)*
$A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité de la réunion et de l'intersection)*

preuve : conséquences directes des définitions.

Définition 3.6 *Soient A et B deux sous-ensembles de E, on définit la différence de A et B par :*

$$A \backslash B = \{x \in E ; x \in A \textit{ et } x \notin B\}$$

, ce sont tous les éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. Cette différence se lit "A moins B".
On remarquera que le complémentaire de A dans E est $E \backslash A$, ce sont tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Définition 3.7 *Une famille A_1, A_2, ...,A_n de sous-ensembles de E est un système complet de E s'il s'agit de parties deux à deux disjointes dont la réunion est égale à E.*
i.e : A_1, A_2, ...,A_n système complet de E si : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
Si de plus tous les A_i sont non vides alors la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est appelée une partition de E.

Définition 3.8 *Étant donnés deux ensembles A et B, l'ensemble des couples $(a\,;b)$ avec a appartenant à A et b appartenant à B est appelé produit cartésien de A et B, il est noté $A \times B$.*

$$A \times B = \{(a\,;b) ; a \in A, b \in B\}$$

De façon générale, le produit cartésien de n ensembles E_1, E_2, ..., E_n est l'ensemble des n-uplets (encore appelés n-listes) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où pour tout i compris entre 1 et n, x_i appartient à E_i, ce produit est noté $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n$, on a :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) ; \forall i \in [\![1;n]\!], x_i \in E_i\}$$

N.B : On note $E^n = \underbrace{E \times E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$

3.3 Applications

Dans tout ce paragraphe E et F désignent deux ensembles.

Définition 3.9 *Une application f de E dans F est un procédé qui à chaque élément x de E associe un unique élément de F que l'on note $f(x)$. E s'appelle l'ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivée.*
$f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de $f(x)$.

Notation :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

Définition 3.10 *Deux applications sont égales si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et si pour tout x appartenant à E, $f(x)$ est égal à $g(x)$.*

N.B :
- Si seulement certains éléments de l'ensemble de départ E ont une image par f, mais pas tous, on dit que f est une fonction de E dans F. Le sous-ensemble constitué des éléments de E admettant une image par f est appelé l'ensemble de définition de f, il est noté D_f. f est une application de D_f sur F.
- L'ensemble des couples $(x\,;f(x))$ pour x appartenant à E est appelé le graphe de f, à ne pas confondre avec la représentation graphique de f.
- Il est fréquent dans le langage courant de ne pas faire de distinction entre "fonction" et "application".

Définition 3.11 *Soit f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A par f l'ensemble noté $f(A)$ des images des éléments de A par f. On a :*

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}$$

Réciproquement, si B est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée de f, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ des antécédents des éléments de B par f. On a :

$$f^{-1}(B) = \{a \in E; f(a) \in B\}$$

Définition 3.12 *Soit f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle restriction de f à A l'application de A vers F qui à tout élément x de A associe $f(x)$. Elle est notée $f_{|A}$.*
Soit f une application définie sur un ensemble A tel que $A \subset B$. On dit que $\tilde{f}$ est un prolongement de f à B si pour tout élément de A, $\tilde{f}(a) = f(a)$.

Définition 3.13 *Soient E, F et G trois ensembles, si f est une application de E vers F et si g est une application de F vers G alors on peut définir l'application composée $g \circ f$ par :*

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

3.4 Injection, surjection, bijection

Définition 3.14 *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est une application injective (ou que f est une injection) si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

i.e : c'est à dire que deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f ou encore que tout élément de l'espace d'arrivée possède au plus un antécédent par f.

Propriété 3.5 *Une application $f : E \to F$ est injective si, et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

preuve : faite en cours.

Exemple : La fonction exponentielle est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

N.B : Pour démontrer qu'une application n'est pas injective, il suffit d'exhiber deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Exemple : La fonction carrée n'est pas une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $(-2)^2 = 2^2$, i.e : 4 possède deux antécédents par la fonction carrée.

Définition 3.15 *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est une application surjective (ou que f est une surjection) si :*

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

i.e : c'est à dire que tout élément de F possède au moins un antécédent par f.

Exemple : La fonction exponentielle est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ mais elle n'en est pas une de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
N.B : Une application f de E dans $f(E)$ est toujours surjective.

Propriété 3.6 *La composée de deux injections est une injection et la composée de deux surjections est une surjection.*

preuve : faite en TD.

Définition 3.16 *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est une application bijective (ou une bijection) si :*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

i.e : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un antécédent et un seul.

Exemple :
- L'identité de E, i.e : l'application qui à tout élément x de E associe x, est une bijection de E vers E. Elle est notée Id_E.
- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 3.7 *Une application est bijective si, et seulement si elle est injective et surjective.*

preuve : conséquence directe des définitions d'injectivité et de surjectivité.

N.B :
Une application qui n'est pas injective ou qui n'est pas surjective n'est donc pas bijective.
Pour démontrer qu'une application est bijective on peut démontrer qu'elle est injective et surjective. Une autre façon de montrer qu'une application est bijective est d'essayer de résoudre l'équation $y = f(x)$ pour un y quelconque est de montrer que cette équation possède exactement une solution dans E.

Définition 3.17 *Soit f une application bijective d'un ensemble E vers un ensemble F. Tout élément y appartenant à F possède un unique antécédent x appartenant à E.*
L'application qui à tout élément y de F associe son antécédent x dans E est aussi une bijection de F vers E appelée bijection réciproque de f. Elle est notée f^{-1}.
Pour déterminer la bijection réciproque de f, on utilise la caractérisation suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Exemple : La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et sa bijection réciproque est la fonction logarithme népérien qui est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

Propriété 3.8 *Soit f une application bijective de E vers F, on a :*
a. $f^{-1} \circ f = Id_E$.
b. $f \circ f^{-1} = Id_F$.

preuve : faite en TD.

Propriété 3.9 *Soient E, F et G trois ensembles, si f est une application de E vers F et g est une application de F vers G alors :*

$$f \text{ bijective et } g \text{ bijective} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective}$$

De plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

preuve : faite en TD.