Relations

INFO1 - Semaines 41 & 42

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 7 octobre 2012

Sommaire

Sommaire

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Soit

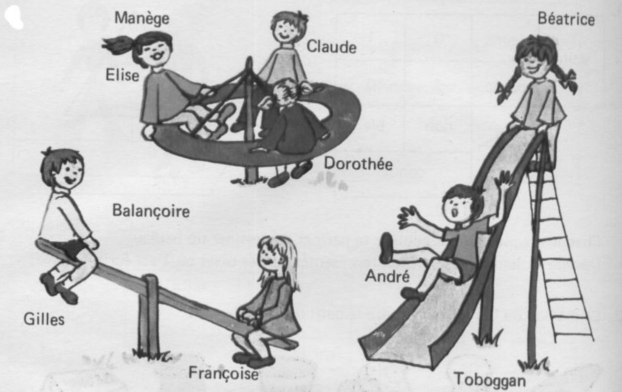
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A \oplus B$ (somme booléenne terme à terme), $A \oplus \mathrm{Attila}(3,3)$ et $A \bar{\wedge} B$ (produit matriciel en utilisant le produit booléen $\bar{\wedge}$ pour le produit des termes et $\oplus$ pour leur somme).

Sommaire

Définition 1

Une *relation binaire* entre deux ensemble E et F est la donnée de E, F et d'un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$.
Une *relation n-aire* entre n ensembles E_1, E_2,...,E_n est la donnée de ces ensembles et d'un sous-ensemble du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots E_n$.



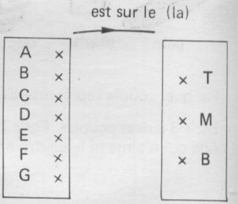
Représente les ensembles comme sur le livre et trace les traits fléchés.

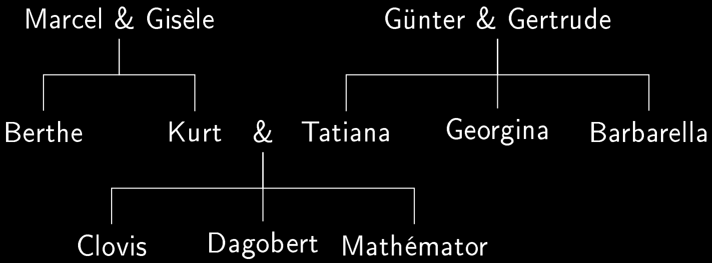
Complète :

André est allé sur ....

Dorothée est allée sur ....

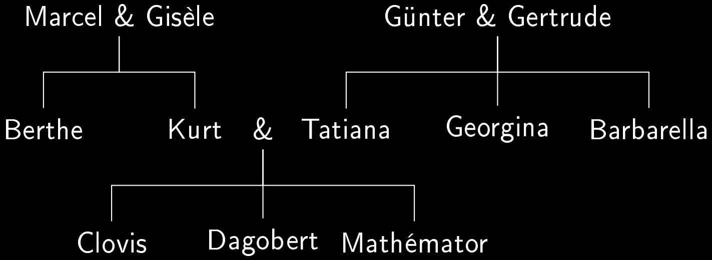
Qui est allé sur la balançoire ? ....





Formez les couples (x, y) tels que x soit le grand-père de y.

Formez les couples (x, y) tels que x soit le frère de y.



Formez les couples (x,y) tels que x soit le grand-père de y.
Formez les couples (x,y) tels que x soit le frère de y.

$$E = \{a, b, c, d, e\} \qquad F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a,\gamma),(b,\beta),(b,\delta),(d,\gamma),(e,\delta)\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{a \mapsto \gamma, b \mapsto \beta, b \mapsto \delta, d \mapsto \gamma, e \mapsto \delta\}$$

$$E = \{a, b, c, d, e\} \qquad F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

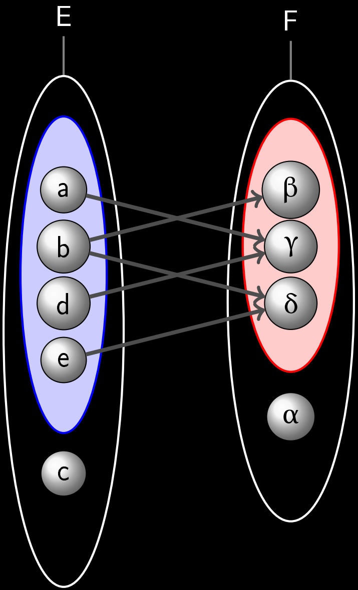
$$G_{\mathcal{R}} = \{(a,\gamma),(b,\beta),(b,\delta),(d,\gamma),(e,\delta)\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{a \mapsto \gamma, b \mapsto \beta, b \mapsto \delta, d \mapsto \gamma, e \mapsto \delta\}$$

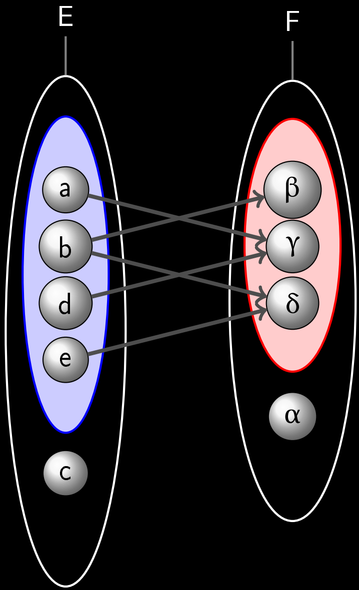
$$E = \{a, b, c, d, e\} \qquad F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, \gamma), (b, \beta), (b, \delta), (d, \gamma), (e, \delta)\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{a \mapsto \gamma, b \mapsto \beta, b \mapsto \delta, d \mapsto \gamma, e \mapsto \delta\}$$



Relation non totale



De	Vers
a	γ
b	β, δ
d	γ
e	δ

$\curvearrowright$	α	β	γ	δ
a	0	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	0	0
d	0	0	1	0
e	0	0	0	1

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
type ('a,'b) relation =
  Rel of ('a * 'b ens)  ens ;;
```

```
let r = Rel(
  Ens((1, Ens ('a', Ens ('b', Vide))),
     Ens((2, Ens ('c', Vide)),
        Ens((3, Ens ('b', Vide)),
           Ens((4, Vide),
              Ens((5, Ens ('b', Vide)),
                 Vide)))))
);;
```

```
# r;;

- : (int, char) relation
```

```
type ('a,'b) relation =
  Rel of ('a * 'b ens)  ens ;;
```

```
let r = Rel(
  Ens((1, Ens ('a', Ens ('b', Vide))),
     Ens((2, Ens ('c', Vide)),
        Ens((3, Ens ('b', Vide)),
           Ens((4, Vide),
              Ens((5, Ens ('b', Vide)),
                 Vide)))))
);;
```

```
# r;;

- : (int, char) relation
```

```
type ('a,'b) relation =
  Rel of ('a * 'b ens)  ens ;;
```

```
let r = Rel(
  Ens((1, Ens ('a', Ens ('b', Vide))),
     Ens((2, Ens ('c', Vide)),
        Ens((3, Ens ('b', Vide)),
           Ens((4, Vide),
              Ens((5, Ens ('b', Vide)),
                 Vide)))))
);;
```

```
# r;;

- : (int, char) relation
```

Définition 2

La **relation transposée** de la relation $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ est la relation notée $\mathcal{R}^{\sim}$ définie par $\mathcal{R}^{\sim} = (F, E, G_{\mathcal{R}^{\sim}})$ avec $G_{\mathcal{R}^{\sim}} = \{(y,x) \in F \times E \mid (x,y) \in G_{\mathcal{R}}\}$, c'est-à-dire $y\mathcal{R}^{\sim}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants*= {*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*} ;
- *Chaînes*= { *TF1, Gulli, Zen TV*} ;
- *TV*= {(*Roger,Gulli*),(*Berthe,Gulli*), (*Jean-Pierre,Zen TV*),(*Gudrun,Gulli*)}.

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$?

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants*= {*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*} ;
- *Chaînes*= { *TF1, Gulli, Zen TV*} ;
- *TV*= {(*Roger*,*Gulli*),(*Berthe*,*Gulli*), (*Jean-Pierre*,*Zen TV*),(*Gudrun*,*Gulli*)}.

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$?

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants=* $\{$*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*$\}$ *;*
- *Chaînes=* $\{$ *TF1, Gulli, Zen TV*$\}$ *;*
- *TV=* $\{$*(Roger,Gulli),(Berthe,Gulli), (Jean-Pierre,Zen TV),(Gudrun,Gulli)*$\}$*.*

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$ *?*

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants*= {*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*} ;
- *Chaînes*= { *TF1, Gulli, Zen TV*} ;
- *TV*= {(*Roger,Gulli*),(*Berthe,Gulli*), (*Jean-Pierre,Zen TV*),(*Gudrun,Gulli*)}.

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$ *?*

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants*= {*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*} ;
- *Chaînes*= { *TF1, Gulli, Zen TV*} ;
- *TV*= {(*Roger,Gulli*),(*Berthe,Gulli*), (*Jean-Pierre,Zen TV*),(*Gudrun,Gulli*)}.

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$?

Exercice 1

Considérons les ensembles et la relation suivants :

- *Étudiants*$=\{$*Roger, Berthe, Jean-Pierre, Gudrun*$\}$;
- *Chaînes*$=\{$ *TF1, Gulli, Zen TV*$\}$;
- *TV*$=\{$*(Roger,Gulli),(Berthe,Gulli), (Jean-Pierre,Zen TV),(Gudrun,Gulli)*$\}$.

Que pensez-vous de la relation transposée $TV^{\sim}$?

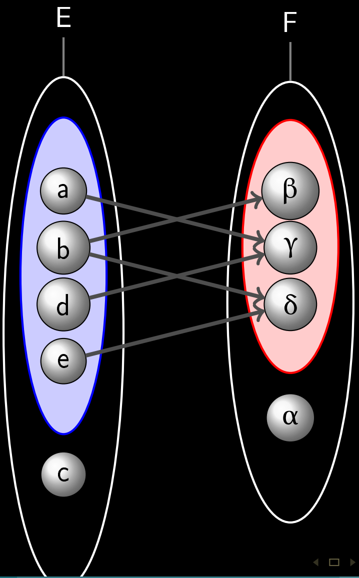
$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{t}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

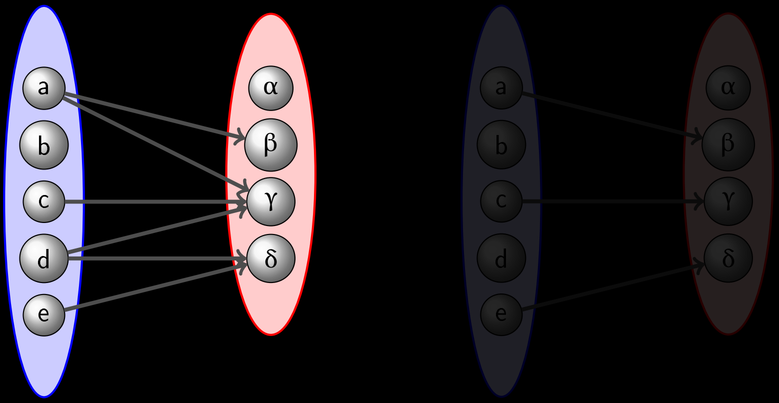
Image Contre-image



Égalité

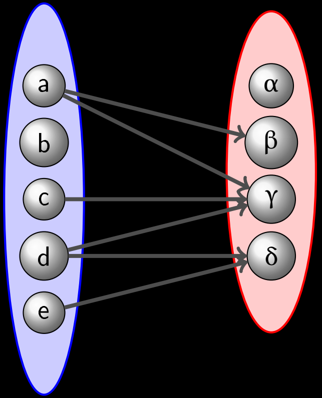
$$E_1 = E_2 \text{ et } F_1 = F_2 \text{ et } G_{\mathcal{R}_1} = G_{\mathcal{R}_2}.$$

Inclusion

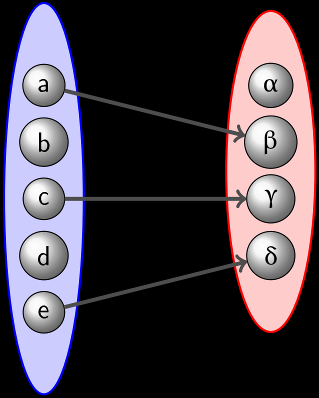


$\mathcal{R}_1$ $\mathcal{R}_2$ est une sous-relation de $\mathcal{R}_1$

Inclusion

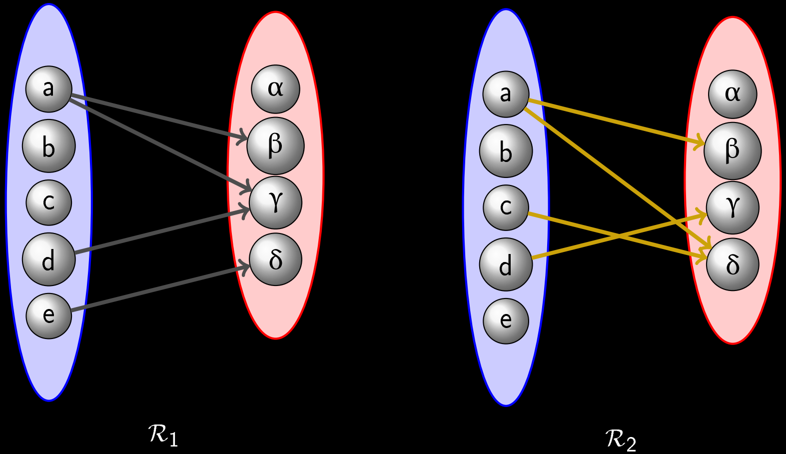


$\mathcal{R}_1$

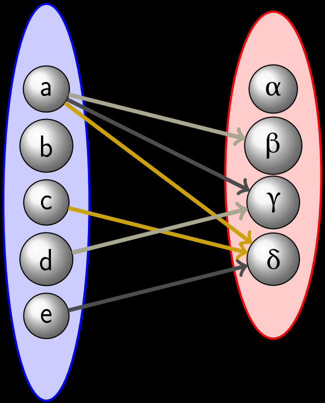


$\mathcal{R}_2$ est une sous-relation de $\mathcal{R}_1$

Réunion

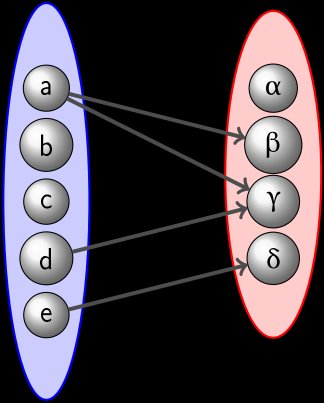


Réunion

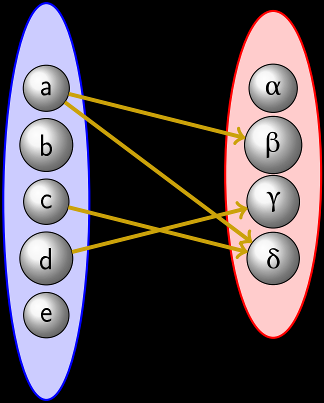


$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$

Intersection

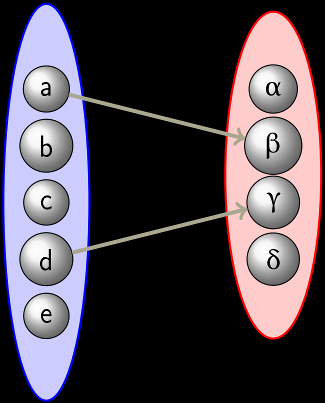


$\mathcal{R}_1$



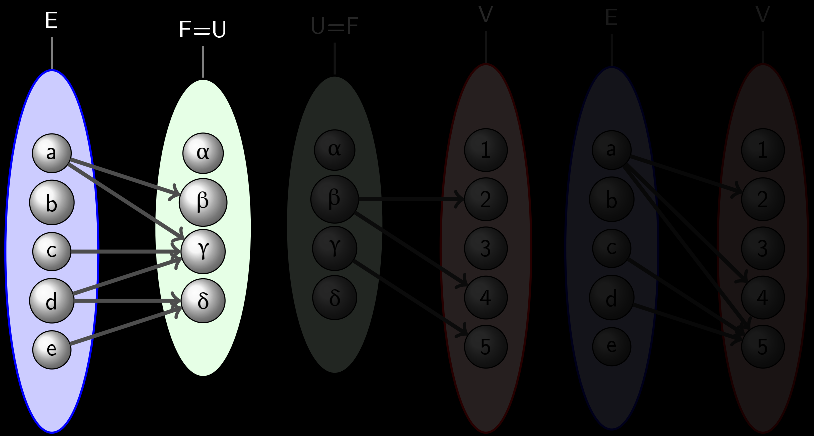
$\mathcal{R}_2$

Intersection

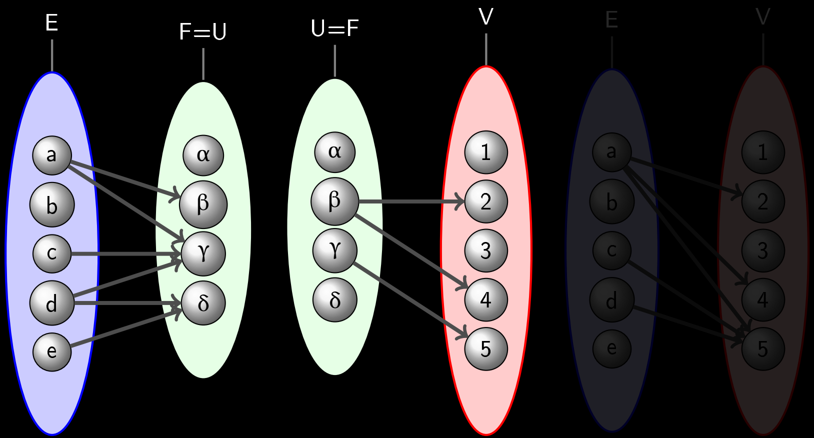


$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$

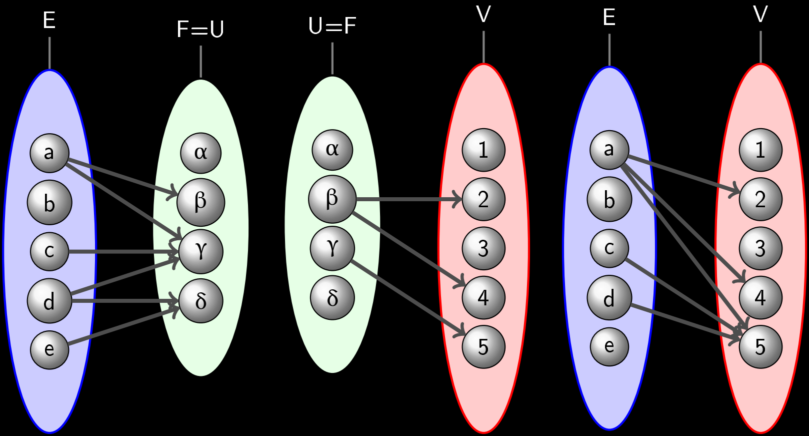
Composition



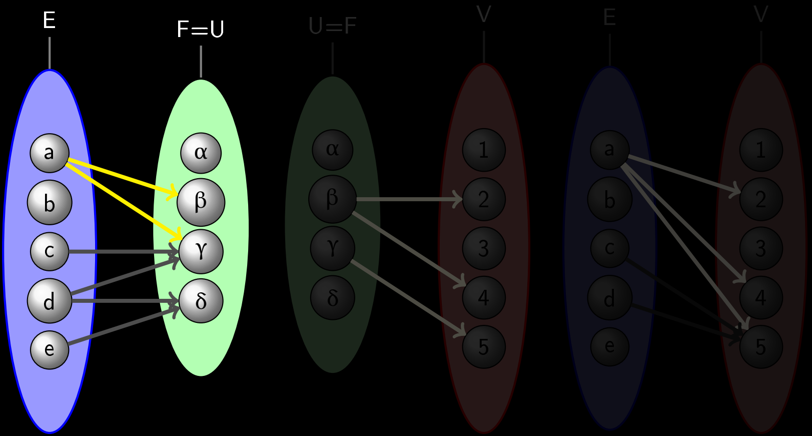
Composition



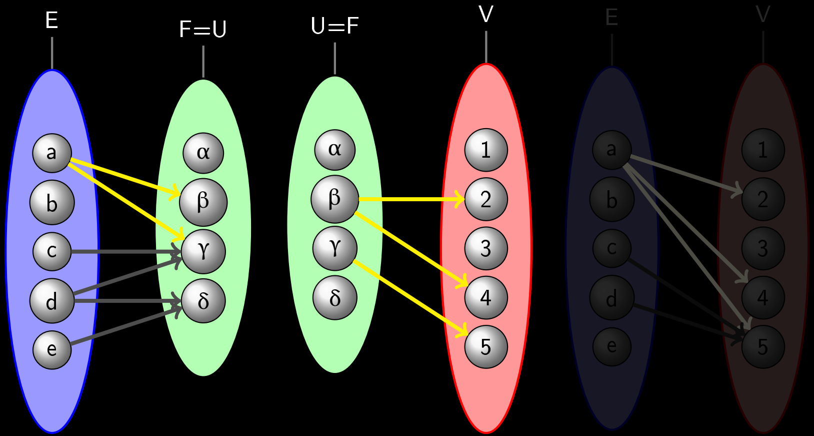
Composition



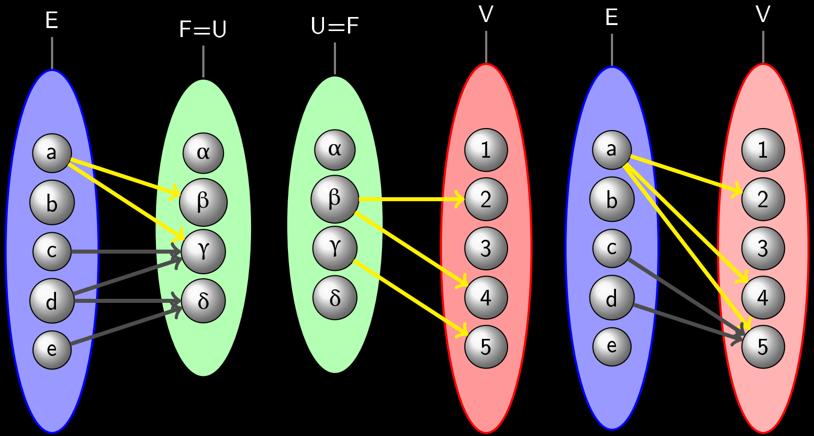
Composition



Composition



Composition



Exercice 2

Si R est la matrice de $\mathcal{R}$ et S la matrice de $\mathcal{S}$ alors quelle sera la matrice de $R\ ;\ S$?

Que pensez de $\mathcal{R}^{\sim} \circ \mathcal{R}$ ou de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{\sim}$? Regardez ce que cela donne avec la relation $\mathcal{R}$ introduite précédemment.
Quelle est la relation transposée de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Exercice 2

Si R est la matrice de $\mathcal{R}$ et S la matrice de $\mathcal{S}$ alors quelle sera la matrice de $R\ ;\ S$?

Exercice 3

Que pensez de $\mathcal{R}^{\sim}\circ\mathcal{R}$ ou de $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{\sim}$? Regardez ce que cela donne avec la relation $\mathcal{R}$ introduite précédemment.
Quelle est la relation transposée de $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$

Exercice 2

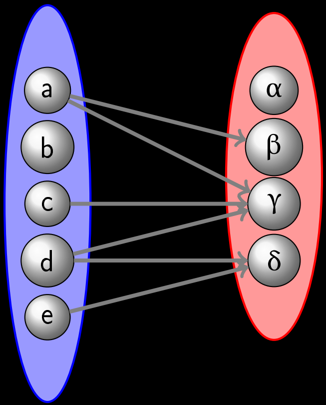
Si R est la matrice de $\mathcal{R}$ et S la matrice de $\mathcal{S}$ alors quelle sera la matrice de $R \,;\, S$?

Exercice 3

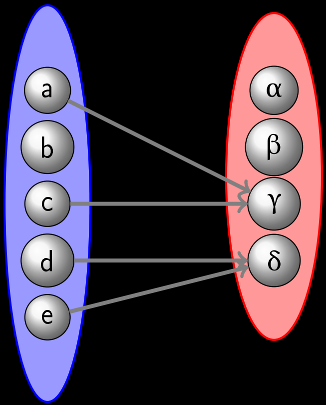
Que pensez de $\mathcal{R}^{\sim} \circ \mathcal{R}$ ou de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{\sim}$? Regardez ce que cela donne avec la relation $\mathcal{R}$ introduite précédemment.
Quelle est la relation transposée de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Sommaire

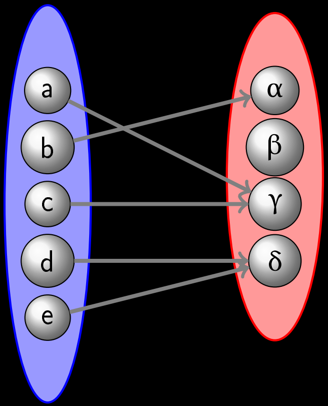
fonction ?



fonction ?



fonction ?



Projection canonique

Définition 3 (Projection canonique)

La fonction totale

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \rightarrow & E_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

est appelée projection canonique de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sur E_i.
Si tous les E_i sont égaux au même ensemble E, π_i est appelée la i^{e} projection.

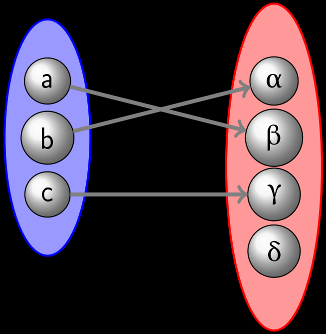
Loi de composition

Définition 4 (Loi de composition)

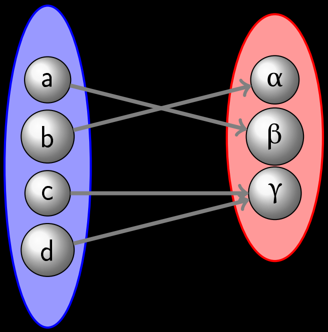
On appelle loi de composition (ou opération) dans E toute fonction de $A \times E$ dans E.
Si $A = E$, on dit que la loi est une loi de composition interne, sinon on parle de loi de composition externe ou loi mixte.

Si f est une telle loi de composition et $(a, x) \in A \times E$, on remplace souvent la **notation préfixée** $f((a, x))$ par une **notation infixée** du style $a \odot x$ ou $a * x$ ou $a \boxplus x$ ou $a \boxdot x$ ou $a + x$ ou...

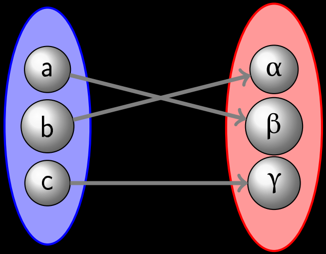
fonction injective



fonction surjective



fonction bijective



Méthode B

En méthode B on note :

- $D ⇸ C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D ⤔ C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D ⤀ C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D ⤗ C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D ⤖ C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D \pfun C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \fun C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \pinj C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \inj C$: injections totales de D vers C ;
- $D \psurj C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \surj C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \pbij C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \bij C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D \nrightarrow C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \mapsto\!\!\!\!\!\nrightarrow C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\, C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\, C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D \mathrel{⇸} C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \mathrel{⤔} C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D \mathrel{⤀} C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \mathrel{⤗} C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \mathrel{⤖} C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D \nrightarrow C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \mapsto\!\!\!\!\!+\; C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+\; C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+\; C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D ⇸ C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D ⤔ C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D ⤀ C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D ⤗ C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D ⤖ C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

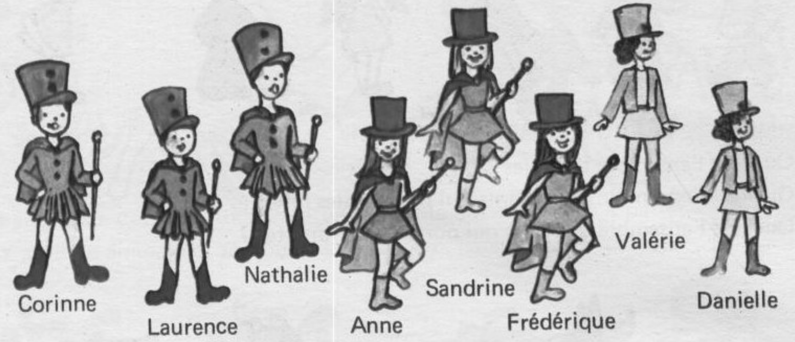
- $D \nrightarrow C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \rightarrow C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$: bijections totales de D sur C.

Méthode B

En méthode B on note :

- $D \mathrel{\to\mkern-17mu+} C$: fonctions partielles de D vers C ;
- $D \to C$: fonctions totales de D vers C ;
- $D \mathrel{\rightarrowtail\mkern-17mu+} C$: injections partielles de D vers C ;
- $D \rightarrowtail C$: injections totales de D vers C ;
- $D \mathrel{\twoheadrightarrow\mkern-17mu+} C$: surjections partielles de D vers C ;
- $D \twoheadrightarrow C$: surjections totales de D vers C ;
- $D \mathrel{\rightarrowtail\mkern-17mu\twoheadrightarrow\mkern-17mu+} C$: bijections partielles de D sur C ;
- $D \mathrel{\rightarrowtail\mkern-17mu\twoheadrightarrow} C$: bijections totales de D sur C.

Sommaire



Représente l'ensemble des prénoms des majorettes. Trace les traits fléchés qui signifient : «... est dans le même groupe que ...».