Fonctions de plusieurs variables

Ce document est une version très sommaire mathématiquement parlant d'un cours sur les fonctions de plusieurs variables. Malheureusement (!?), notre horaire ridicule ne nous permet pas d'aborder ces notions de manières plus rigoureuse.

1- Introduction

Les fonctions de plusieurs variables[1] apparaissent naturellement en physique et en mathématique. Nous sommes d'ailleurs déjà familier avec le maniement de telles fonctions. En effet, considérons par exemple un triangle de base b et de hauteur h. Nous savons que l'aire A de ce triangle est donnée par la formule

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} bh.$$

Ainsi lorsque b varie, A varie et de même pour h. Nous voyons sur cette formule, qu'a tout couple (b, h) correspond une unique valeur A. Nous dirons alors que A est une fonction des deux variable b et h et nous noterons $\mathrm{A} \equiv f(b, h)$, où f sera la fonction de deux variables définie par

$$f(b, h) = \frac{1}{2} bh.$$

A Notations et terminologie

D'une manière générale, on aura la définition suivante :

Définition 1
Une fonction f de n variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une loi qui assigne un unique nombre réel noté $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}^n$. On notera

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

On appelle D_f le domaine de définition de f.

Si l'on se donne une fonction de plusieurs variables par une formule explicite sans préciser le domaine de définition de cette fonction, alors il est sous-entendu que le domaine de définition est constitué de tous les points pour lesquels « la formule est bien définie », c'est à dire, ne fournit pas de nombre complexe, ni de divisions par zéro. On parle alors de domaine naturel de définition.

Exemple Soit

$$f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2}.$$

[1] Il est sous-entendu que nous parlons de fonctions *numériques* de plusieurs variables *toutes réelles*.

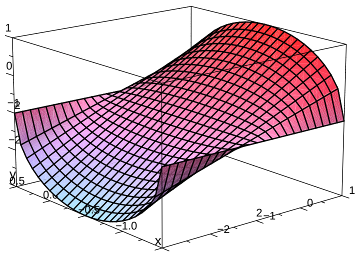

FIG. 1 $f(x,y) = x\sqrt{1-y^2}$

Alors f est une fonction de deux variables de domaine naturel de définition[2]

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, |y| \leqslant 1\}.$$

Exemple Soit

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y).$$

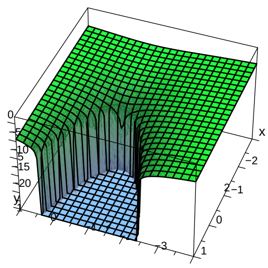

FIG. 2 $f(x,y) = ln\left(x^2 - y\right)$

f est seulement définie lorsque $x^2 - y > 0$, c'est à dire pour les couples (x,y) tels que $y < x^2$. La courbe (qui est une parabole) $y = x^2$ sépare le plan Oxy en deux régions (et l'une de ces régions est convexe). Pour savoir "de quel côté" de cette courbe se trouve le domaine naturel de définition de f, on utilise un couple test. Par exemple, pour le couple $(x,y) := (0,1)$, on a $x^2 = 0$ et $y = 1$, donc ce point appartient à la région où $y > x^2$. Le domaine naturel de définition correspond donc à la région ne contenant pas le point $(0,1)$.

B Représentation graphique

De la même manière que vous avez appris à associer à une fonction f d'une variable x son graphe (qui est l'ensemble des couples $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f\}$, nous allons associer à une fonction f de n variables $x_1, \dots, x_n$ son graphe généralisé, c'est à dire l'ensemble des $(n+1)$-uplet $\{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D_f\}$. Le graphe de f est ainsi une surface (généralisée) S dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'ensemble des points correspondant dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est la surface (généralisée) représentative S de f.

Exemple Considérons la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Le graphe de cette fonction est par définition l'ensemble des couples (x,y,z) solution de l'équation

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}. \tag{2}$$

[2] La seule restriction sur le couple (x,y) pour que $f(x,y)$ soit bien définie provient de la variable y. On doit en effet demander que l'expression $1-y^2$ soit positive pour que la racine de cette expression soit définie.

Après avoir élevé au carré les deux cotés de l'équation précédente, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, qui représente une sphère de rayon unité, centrée à l'origine. Nous devons toutefois tenir compte du fait que l'équation (2) impose $z \geq 0$. Ainsi, le graphe de f correspond à la demi-sphère supérieure de rayon unité dans l'éspace $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère habituel (Ox, Oy, Oz).

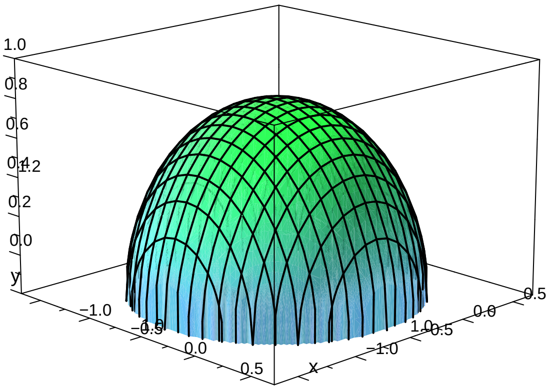

FIG. 3 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Exercice 1

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ b) $g(x, y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ c) $\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

C Lignes de niveau

On peut aussi représenter la distribution des valeurs de la fonction f à l'aide de l'ensemble des points où f prend une valeur donnée K. Cet ensemble est la courbe d'équation $\mathrm{K} = f(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{R}^n$. On l'appelle ligne de niveau d'ordre K. Pour une fonction f de deux variables x, y, la ligne de niveau $\mathrm{K} = f(x, y)$ la section de la surface (généralisée) S avec le plan parallèle à (Oxy) et passant par le point de coordonnées $(0, 0, \mathrm{K})$.

Exemple Considérons la fonction définie par $f(x, y) = xy$. La ligne de niveau d'ordre K s'obtient comme le graphe des solutions de l'équation $xy = \mathrm{K}$, c'est à dire $y = \mathrm{K}/x$. La ligne de niveau d'ordre K est donc l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{\mathrm{K}}{x}$ dans le plan d'équation $z = \mathrm{K}$.

Exemple Reprenons la figure A. La ligne de niveau d'ordre K s'obtient comme le graphe des solutions de l'équation $\ln\left(x^2 - y\right) = \mathrm{K}$, c'est à dire $x^2 - y = e^{\mathrm{K}}$. La ligne de niveau d'ordre K est donc la parabole d'équation $y = x^2 - e^{\mathrm{K}}$ dans le plan d'équation $z = \mathrm{K}$.

Exemple Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Il suffit d'étudier le graphe des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{K}.$$

1. Pour $\mathrm{K} > 0$, le graphe des solutions de cette équation est une sphère de rayon $\sqrt{\mathrm{K}}$ centrée à l'origine.
2. Pour $\mathrm{K} = 0$, le graphe des solutions de l'équation est uniquement constitué du point origine $(0, 0, 0)$.
3. Pour $\mathrm{K} < 0$, Il n'y a pas de ligne de niveau.

Exercice 2

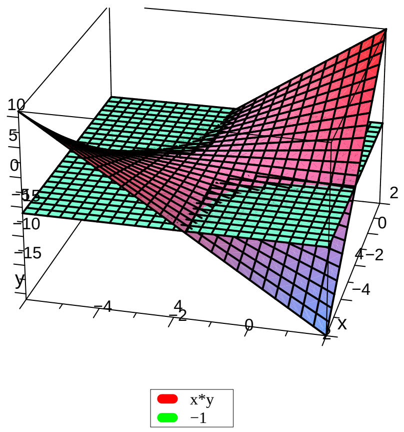

FIG. 4 Ligne de niveau $f(x, y) = xy = \mathrm{K}$

Soit

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

La ligne de niveau de cote $\mathrm{K} = 0$, consiste en l'axe des abscisses et des ordonnées, car $f(x, y) = 0$, si et seuleument si, ou bien x ou bien y est nul. En général, pour $\mathrm{K} > 0$, on doit discuter l'équation $f(x, y) = \mathrm{K}$. Résoudre cette équation en y en fonction de x. Montrer que, pour K fixé tel que $|\mathrm{K}| \leq 1/2$, la ligne de niveau à la cote K est constitué de deux droites passant par l'origine.

Exercice 3 Loi des gaz parfaits

Des gaz ayant certaines propriétés plus tard sont appelés *gaz parfaits*. Ces gaz obéissent à une loi assez remarquable

$$\mathrm{PV} = n\mathrm{RT}$$

où où P, V et T représentent respectivement la pression, le volume et la température du gaz . Le nombre n représente la quantité de matière exprimée en moles et R est la constante des gaz parfaits et vaut 8,3 $\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

Voici la représentation de cette équation pour une mole de gaz

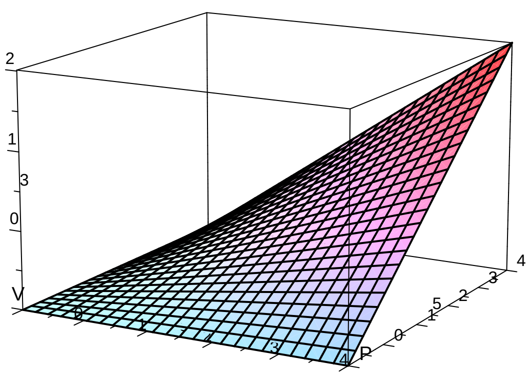

FIG. 5 Loi des Gaz parfaits

Étudiez les courbes isochores (à volume constant), isobares (à pression constante) et isothermes (à température constante)

2- Limites et continuité

Pour une fonction f d'une variable x, on a été amené pour étudier la continuité de f en un point x_0 du domaine de définition D_f, à considérer les limites à gauche et à droite de x_0,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Ces limites reflètent le fait que l'on peut approcher le point x_0 dans deux directions le long de l'axe x, c'est à dire, par la gauche ou par la droite.

Pour une fonction f de deux variables x, y, la situation est déjà entièrement différente. En effet, étant donné un point $M^*(x^*, y^*)$ appartenant à D_f, on peut approcher ce point dans une infinité de direction dans le plan Oxy. *Représentez quelques-unes de ces possibilités sur un schéma.*

A Limite le long d'une courbe

Soient f une fonction de n variables de domaine de définition D_f et $M^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ un point de D_f. Supposons que C soit une courbe[3] dans D_f, c'est à dire il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $C : I \ni t \mapsto C(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D_f$. On suppose de plus que pour un certain $t^* \in I$, $C(t^*) = M^*$. Alors la limite de $f(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $M(x_1, \dots, x_n)$ approche M^* le long de C est notée

$$\lim_{M \xrightarrow{C} M^*} f(M),$$

et est définie par

$$\lim_{M \xrightarrow{C} M^*} f(M) := \lim_{t \to t^*} f(C(t)).$$

Autrement dit, dit d'une manière simple, la limite d'une fonction de n variables le long d'une courbe est obtenue en substituant les équations paramétriques de la courbe dans la formule définissant la fonction, puis en calculant la limite appropriée de la fonction résultante d'une seule variable, limite usuelle au sens des fonctions d'une variable. *A vous de traduire cela par un schéma.*

Exemple Soit

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Nous allons évaluer la limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ le long de différentes courbes.

1. La courbe C correspond à l'axe des abscisses : Les équations paramétriques de l'axe des abscisses sont[4] $x = t$, $y = 0$ ainsi

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C} (0,0)} f(x,y) = \lim_{t \to 0} f(t,0) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

2. La courbe C correspond à l'axe des ordonnées : Les équations paramétriques de l'axe des ordonnées sont[5] $x = 0$, $y = t$ ainsi,

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C} (0,0)} f(x,y) = \lim_{t \to 0} f(0,t) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

3. La courbe C correspond à la droite d'équation $y = x$: Les équations paramétriques de la droite $y = x$ sont[6] $x = t$, $y = t$ ainsi,

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C} (0,0)} f(x,y) = \lim_{t \to 0} f(t,t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

[3] On considèrera toujours que l'on travaille avec des courbes « lisses ».
[4] Autrement dit $C : \mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), y(t)) := (t, 0)$, où on a choisi $I = \mathbb{R}$ et $t^* = 0$.
[5] Autrement dit $C : \mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), y(t)) := (0, t)$, où on a choisi $I = \mathbb{R}$ et $t^* = 0$.
[6] Autrement dit $C : \mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), y(t)) := (t, t)$, où on a choisi $I = \mathbb{R}$ et $t^* = 0$.

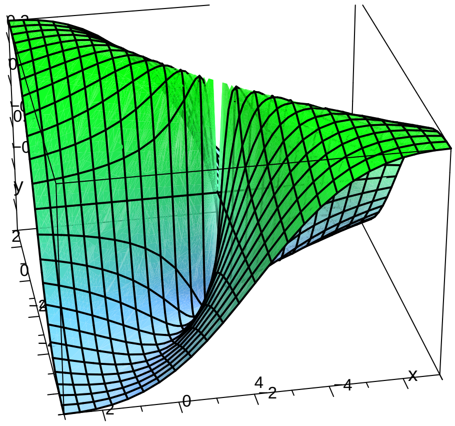

FIG. 6 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

B Coordonnées polaires

Soit f une fonction de deux variables x, y,. Il est souvent utile de faire le changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. En gardant θ fixé et en faisant tendre r vers 0, on approche le point origine suivant la droite faisant un angle θ avec l'axe des abcisses (Ceci constitue la courbe C_θ).

Exemple Soit

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

On peut évaluer

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_\theta}(0,0)} f(x,y)$$

en utilisant le passage en coordonnées polaires qui conduit à

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1.$$

On remarque que la limite est la même pour toutes les courbes C_θ.

Exercice 4

Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 \ \text{si } x = y = 0 \\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ \text{sinon} \end{cases}$

En approchant (0,0) suivant la droite d'équation $x = 2y$ dans llepan d'équation $z = 0$, et avec une idée intuitive de la continuité d'une fonction de 2 variables en en (0,0), montrez que f n'est pas continue en (0,0).

C Limites générales et continuité

Nous n'avons étudié qu'un cas particulier d'étude de limite de fonction de plusieurs variables. La notion générale de limite, c'est à dire la notion de limite pour une fonction de n variables lorsque un point $M(x_1,..,x_n)$ tend vers un point $M^*(x_1^*,...,x_n^*)$, et ceci non obligatoirment suivant une courbe lisse, dépasse notre niveau actuel.

3- Dérivées partielles et différentiabilité

Définition 2

Soit f une fonctions de n variables $x_1, ..., x_n$. On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable $x_j, 0 \leq j \leq n$, la limite, si elle existe, suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, .., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_n) - f(x_1, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n)}{h}. \tag{3}$$

On utilise les symboles

$$f'_{x_j}(x_1, ..., x_n), \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, ..., x_n), \quad \text{ou} \quad \partial_{x_j} f(x_1, ..., x_n).$$

Autrement la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_j est obtenue comme la dérivée usuelle au sens des fonctions d'une variable de la fonction f pour laquelle on considère que les variables $x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n$ sont fixées, c'est à dire que l'on considère seulement que la variable x_j n'est pas fixée.

Exercice 5

Écrivez cette définition dans le cas d'une fonction de 2 variables.

Si ces dérivées partielles existent non seulement au point $M^*(x_1^*, ..., x_n^*)$, mais dans un voisinage de M^*, elles définissent à leurs tour, n nouvelles fonctions $\partial_{x_i} f, i = 1..., n$ de n variables $x_1, ..., x_n$. Ces fonctions peuvent, elles aussi, admettrent des dérivées partielles par rapport aux n variables. On appellera ces dérivées, dérivées partielles secondes de f, comme par exemple

$$\partial_{x_j}(\partial_{x_k} f(x_1, ..., x_n)),$$

que nous noterons

$$\partial^2_{x_j x_k} f(x_1, ..., x_n).$$

Exemple Soit $f(x, y) := x^4 \sin(xy^3)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y) &= \partial_x(x^4 \sin(xy^3)) = x^4 \partial_x(\sin(xy^3)) + \sin(xy^3)\partial_x(x^4), \\
&= x^4 y^3 \cos(xy^3) + 4x^3 \sin(xy^3). \\
\partial_y f(x, y) &= \partial_y(x^4 \sin(xy^3)) = x^4 \partial_y(\sin(xy^3)) + \sin(xy^3)\partial_y(x^4), \\
&= x^4.(3xy^2)\cos(xy^3) + \sin(xy^3).0 = 3x^5 y^2 \cos(xy^3).
\end{aligned} \tag{4}$$

Remarque On peut donner une interprétation géométrique simple aux dérivées partielles. Considérons pour que cela soit plus aisé à formuler une fonction f de deux variables. Soit $P(x, y, z)$ un point de la surcafe $z = f(x, y)$. Si on garde y constant, par exemple $y = y_0$, et que l'on laisse varier x, alors le point P se déplace le long d'une courbe C_1 obtenue comme l'intersection de la surface avec le plan vertical $y = y_0$. La dérivée partielle

$$\partial_x f(x_0, y_0),$$

peut-être interprétée comme la pente de la droite tangente à la courbe C_1 au point $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exemple La diagonale d'un rectangle de coté x, y a pour valeur $D = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le taux de variation lorsque x varie et y reste constant de D est

$$\partial_x D = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Exercice 6

Calculer les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto x^{y^2}$.
2. $f : (x,y) \mapsto \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.
3. $f : (x,y) \mapsto \text{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.
4. $f : (x,y,z) \mapsto \exp(x/y)+\exp(z/y)$.
5. $\mathrm{T} : (\mathrm{P},\mathrm{V}) \mapsto (\dfrac{1}{\mathrm{R}}\left(\mathrm{P}+\dfrac{a}{\mathrm{V}^2}\right)(\mathrm{V}-b)$ (Loi de Van der Walls)

On peut définir des dérivées d'ordre supérieur : f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx},...

Exercice 7

Calculez toutes les dérivées d'ordre 1 des fonctions $(x,y) \mapsto \ln \dfrac{y}{x}$ et $(x,y) \mapsto \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

A Théorème d'inversion de Schwartz

Soit f une fonction de deux variables x, y. Supposant que $\partial_{xy} f(x,y)$ et $\partial_{yx} f(x,y)$ existent, on est amené à se demander si ces deux dérivées partielles coincident. Le théorème de Schwartz qui répond à ce problème étant hors de notre portée, nous supposerons que les cas que nous étudierons « marcheront ».

Exercice 8

Calculez les différentielles d'ordre 2 de la fonction $(x,y) \mapsto \ln \dfrac{y^2}{x}$. Que remarquez-vous ?

B Fonctions différentiables

Rappelons qu'une fonction f d'une variable est dite dérivable en un point x_0 de son domaine de définition si cette fonction admet une dérivée en ce point, c'est à dire la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Une fonction dérivable est caractérisée par deux propriétés importantes. Tout d'abord la fonction est continue au point considéré, c'est à dire "dérivable implique continue", et de plus, la courbe $y = f(x)$ admet une tangente non vertical au point considéré.

Pour les fonctions de deux variables, la situation est très différente. En effet, il est aisé de se persuader qu'il n'est pas suffisant de demander que les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent pour définir la notion de dérivabilité. En effet, on a déjà rencontrer des fonctions qui possèdent des dérivées partielles d'ordre un en un point donné, mais qui ne sont pour autant pas continues en ce point.

Exemple Soit $f(x,y) = -1$ si $x > 0$ et $y > 0$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Alors f est discontinue au point $(0,0)$, mais les dérivées partielles existent à l'origine, $\partial_x f(0,0) = 0$, $\partial_y f(0,0) = 0$.

Nous ne verrons pas de définition de la différentiabilité...mais nous utiliserons cette notion (c'est la logique du programme !).

Retenez quand même que la diff'erentiabilité d'une fonction de deux variables est une notion plus forte que la simple existence des dérivées partielles du premier ordre.

C Dérivation en chaine

Propriété 1

Si $x = x(t)$ et $y = y(t)$ sont deux fonctions dérivables de la variable t, et si $z = f(x, y)$ est différentiable au point $(x(t), y(t))$, alors $z = f(x(t), y(t))$ est différentiable en t et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemple Soient $z = f(x, y) = x^2 y$, $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = t^3$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2), \\ &= (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6. \end{aligned} \tag{5}$$

Remarquons qu'il y a une manière beaucoup plus simple d'obtenir ce résultat en remplacant directement x et y par leurs expressions en fonction de t dans l'expression de z. En effet, $z = x^2 y = (t^2)^2(t^3) = t^7$, ce qui conduit bien au résultat précédent.

Exemple Soient $z = \sqrt{xy + y}$, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. On obtient de la loi de dérivation en chaine :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}, \\ &= \frac{1}{2}(xy + y)^{-1/2}(y)(-\sin\theta) + \frac{1}{2}(xy + y)^{-1/2}(x + 1)(\cos\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

En particulier, si l'on veut calculer $\frac{dz}{d\theta}$ lorsque $\theta = \pi/2$, on est conduit à

$$x = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad y = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

En substituant $x = 0, y = 1, \theta = \pi/2$, on obtient

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{2}(1)(1)(-1) + \frac{1}{2}(1)(1)(0) = -\frac{1}{2}.$$

Remarque Dans le cas particulier d'une fonction $z = F(x, y)$ de deux variables où y est une fonction différentiable de la variable x, on peut-écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Cette relation est utile lorsque l'on cherche les solutions de l'équation $F(x, y) = 0$ sous la forme de couple $(x, y(x))$, où $y(x)$ est une fonction différentiable de x. En différentiant $F(x, y) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

pourvu que

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Par exemple, si on cherche à déterminer la condition sur la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de la variable y vérifiant l'équation $x^3 + y^2x - 3 = 0$, on aura avec $F(x,y) = x^3 + y^2x - 3$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}.$$

Venons-en maintenant à une forme générale du théorème de la loi de dérivation en chaine.

Propriété 2

Si $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$ sont deux fonctions des deux variables u, v admettant des dérivées partielles du premier ordre $\partial_u x, \partial_v x, \partial_u y, \partial_v y$ au point (u,v), et si $z = f(x,y)$ est différentiable au point $(x(u,v), y(u,v))$, alors $z = f(x(u,v), y(u,v))$ admet des dérivées partielles du premier ordre $\partial_u z, \partial_v z$ en (u,v) données par

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{7}$$

Exemple Soient $z = e^{xy}, x = 2u + v, y = u/v$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (ye^{xy})(2) + (xe^{xy})(\frac{1}{v}) = \left(2y + \frac{x}{v}\right)e^{xy},\\ &= \left(2\frac{u}{v} + \frac{2u+v}{v}\right)e^{(2u+v)(u/v)} = \left(4\frac{u}{v} + 1\right)e^{(2u+v)(u/v)}.\end{aligned} \tag{8}$$

Exercice 9

1. Soit $f = \exp(u - 2v)$, où $u : (x,y) \mapsto \sin(x)$ et $v : (x,y) \mapsto x^3 + y^2$. Calculer $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$.

2. Soit $f = \arcsin(u + v)$, où $u : x \mapsto \cos(\alpha)\sin(x)$ et $v : x \mapsto \sin(\alpha)\cos(x)$. Calculer $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$.

Exercice 10

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x\varphi(y/x)$. Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Exercice 11

Montrer que $f : (x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation de Laplace $(\partial^2 f/\partial x^2) + (\partial^2 f/\partial y^2) = 0$.

4- Extremums

Nous n'entrerons pas dans le détail des preuves, mais retiendrons quelques idées pratiques.

Définition 3 Point critique
Le point $M(x_0, y_0)$ est un point critique de la suface d'équation $z = f(x, y)$ si et seulement si $f'_x(x_0, y_0 1) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

Cette définition nous permet d'énoncer le théorème fondamental suivant

Théorème 1
Si la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est suffisamment régulière et admet un extremum au point M, alors M est nécessairement un point critique

Ce théorème dit seulement que pour être un extremum, il faut d'abord être un pont critique, mais être un point critique n'est parfois pas suffisant.

Exemple Considérons par exemple la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$. alors $f'_x(x, y) = 2x$ et $f'_y(x, y) = -2y$. nous en déduisons que (0,0) est le seul point critique. Pourtant, ce n'est ni un minimum ($f(0,1) = -1 < f(0,0)$), ni un maximum ($f(1,0) = 1 > f(0,0)$). C'est en fait un point col comme l'illustre la figure :

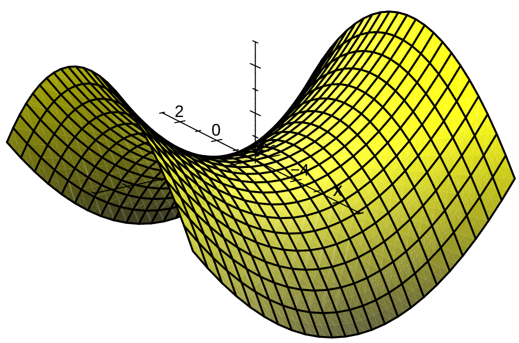

FIG. 7 $f(x, y) = x^2 - y^2$

Malgré tout, il existe une condition nécessaire et suffisante dont la preuve est encore hors de notre portée

Théorème 2
Soit $f : x \mapsto f(x, y)$ une fonction suffisamment régulière. Posons $r = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ et $t = f''_{y^2}(x_0, y_0)$
Alors f admet un extremum en (x_0, y_0) si, et seulement si

$$\begin{cases} \delta = s^2 - rt < 0 \\ f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Exemple Considérons la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
Vérifiez qu'après calcul on obtient 2 points crtiques : (0,0) et (1,1), puis que

▷ en (0,0), $\delta = 9 > 0$

▷ en $(1,1)$, $\delta = -27 < 0$

Donc seul (1,1) est un extremum. Or $f(1,1) = -1 < f(1,0) = 1$, donc f admet un minimum en (1,1).

Exercice 12

1. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto 0.5 - \sin(x^2 + y^2)$ admet un extremum à l'origine et indiquer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Étudier les points critiques de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - xy + 3x - 2y + 1$.
3. Étudier les points critiques de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

5- Différentielles

Définition 4

Etant une fonction f de deux variables suffisamment régulière, on appelle différentielle totale de f au point (x_0, y_0) l'application linéaire $\mathrm{d}f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ & (h_1, h_2) \mapsto \mathrm{d}f(h_1, h_2) = h_1 \partial_x f(x_0, y_0) + h_2 \partial_y f(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{9}$$

On commettra souvent un abus de notation en confondant la différentielle et sa valeur, c'est à dire on notera cette valeur aussi $\mathrm{d}f$.

Remarque Si f est la fonction définie par $f(x,y) = x$, on a $\partial_x f = 1$, $\partial_y f = 0$ et $\mathrm{d}f = dx = h_1$ et de la même manière pour $f(x,y) = y$, $\mathrm{d}f = dy = h_2$. On écrira ainsi pour une fonction f quelconque

$$\mathrm{d}f = \partial_x f(x_0, y_0)dx + \partial_y f(x_0, y_0)dy.$$

Propriété 3

On a les règles suivantes :

1. Si $f = uv$, on a $\mathrm{d}f = udv + vdu$.
2. Si $f = u/v$, on a $\mathrm{d}f = (vdu - udv)/(v^2)$.

Exemple $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ et $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y$

Exercice 13

Calculer les différentielles totales des fonctions :

1. $f : (x,y) \mapsto \ln(xy)$.
2. $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy^2 + \sin y$.
3. $f : (x,y,z) \mapsto \tan(3x - y) + 6^{y+z}$.

6- Formes différentielles

Définition 5
On appelle forme différentielle toute application du type

$$\omega = \mathrm{A}(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Le problème, notamment en thermodynamique, sera de savoir si ω est la différentielle totale d'une fonction de deux variables f.

On dira alors que ω est une **forme différentielle exacte**.

Si l'on suppose que ω est exacte, alors on doit avoir

$$\mathrm{A}(x,y) = f'_x(x,y) \quad \mathrm{B}(x,y) = f'_y(x,y)$$

Or, compte tenu de la régularité de f, on doit avoir $f''_{xy} = f''_{yx}$, donc $\mathrm{A}'_y = \mathrm{B}'_x$.

On admettra donc le résultat suivant

Théorème 3
$\omega = \mathrm{A}(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x,y)\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle exacte si et seulement si

$$\mathrm{A}'_y(x,y) = \mathrm{B}'_x(x,y)$$

Mais on ne s'arrête pas là ! Il faut continuer à bidouiller sur des objets mathématiques que nous ne pouvons pas, à notre niveau, définir proprement, mais que le physicien réclame...

Notre problème est maintenant le suivant : ayant vérifié qu'une forme différentielle était exacte, peut-on « remonter » vers la fonction dont elle est la différentielle exacte ?

Exemple Soit $\omega = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$. On vérifie facilement que cette forme différentielle est exacte.

Alors $\mathrm{A}(x,y) = 2xy = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, donc $f(x,y) = \displaystyle\int 2xy + g(y)$, $g(y)$ étant la partie constante par rapport à x de $f(x,y) =$ mais pouvant dépendre de y.

On obtient $f(x,y) = x^2y + g(y)$. Mais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{B}(x,y) = x^2$ d'une part mais aussi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + g'(y)$. On en déduit que $g'(y) = 0$ et donc que $g(y) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 14

1. Montrez que $\dfrac{(3x^2+y^2)y\,\mathrm{d}x - 2x^3\,\mathrm{d}y}{y^3}$ est la différentielle totale d'une fonction que vous déterminerez.

2. Même question avec $(y^2-3)x\,\mathrm{d}x + (1+x^2)y\,\mathrm{d}y$