Étude d'algorithmes

Informatique pour tou(te)s - semaines 42 & 43

Guillaume CONNAN

octobre 2015

Lycée Clemenceau - MP / MP*

Sommaire

Sommaire

Le problème

On dispose d'une liste de N nombres. Déterminez le nombre de triplets dont la somme est nulle.

```python
def trois_sommes(xs):
    N = len(xs)
    cpt = 0
    for i in range(N):
        for j in range(i + 1, N):
            for k in range(j + 1, N):
                if xs[i] + xs[j] + xs[k] == 0:
                    cpt += 1
    return cpt
```

```
In [1]: %timeit trois_sommes([randint(-10000,10000) for k in
        ↪  range(100)])
10 loops, best of 3: 27.5 ms per loop

In [2]: %timeit trois_sommes([randint(-10000,10000) for k in
        ↪  range(200)])
1 loops, best of 3: 216 ms per loop

In [3]: %timeit trois_sommes([randint(-10000,10000) for k in
        ↪  range(400)])
1 loops, best of 3: 1.82 s per loop
```

```python
def trois_sommes_comp(xs):
    n = len(xs)
    return len([(i,j,k) for i in range(n) for j in range(i+1, n) for k
            ↪  in range(j+1,n) if xs[i] + xs[j] + xs[k] == 0 ])
```

```
In [24]: %timeit trois_sommes_comp([randint(-10000,10000) for k in
         ↪  range(100)])
10 loops, best of 3: 28.1 ms per loop

In [25]: %timeit trois_sommes_comp([randint(-10000,10000) for k in
         ↪  range(200)])
1 loops, best of 3: 222 ms per loop

In [26]: %timeit trois_sommes_comp([randint(-10000,10000) for k in
         ↪  range(400)])
1 loops, best of 3: 1.85 s per loop
```

```python
from time import perf_counter
from math import log2

def temps(xs):
    debut = perf_counter()          # on déclenche le chrono
    trois_sommes(xs)                # on lance le calcul
    return perf_counter() - debut # on arrête le chrono quand c'est
        ↪ fini

# on fabrique une liste contenant les temps de calcul pour des
    ↪ longueurs de 100, 200, 400 et 800
t = [temps(range(100 * 2**k)) for k in range(4)]

# on forme la liste des ratios
ratio = [t[k + 1] / t[k] for k in range(3)]

# on applique la fonction log2 aux éléments de la liste des ratios
logratio = [log2(r) for r in ratio]
```

```
In [4]: ratio
Out[4]: [7.523860206447286, 9.118789882406599, 8.5098312160934]

In [5]: logratio
Out[5]: [2.940628541715559, 3.133284732580891, 3.128693841844642]
```

```
In [6]: temps(range(400))
Out[6]: 4.005484320001415
```

$4,00 = a \times 400^3$ donc $a \approx 6,25 \times 10^{-8}$

Donc pour $N = 1000$, on devrait avoir un temps de $6,25 \times 10^{-8} \times 10^9 = 62,5$

```
In [7]: temps(range(1000))
Out[7]: 68.54615448799996
```

```
In [6]: temps(range(400))
Out[6]: 4.005484320001415
```

$4,00 = a \times 400^3$ donc $a \approx 6,25 \times 10^{-8}$

Donc pour $N = 1000$, on devrait avoir un temps de $6,25 \times 10^{-8} \times 10^9 = 62,5$

```
In [7]: temps(range(1000))
Out[7]: 68.54615448799996
```

```
In [6]: temps(range(400))
Out[6]: 4.005484320001415
```

$4,00 = a \times 400^3$ donc $a \approx 6,25 \times 10^{-8}$

Donc pour $N = 1000$, on devrait avoir un temps de $6,25 \times 10^{-8} \times 10^9 = 62,5$

```
In [7]: temps(range(1000))
Out[7]: 68.54615448799996
```

En C

```
$ gcc  -std=c99 -Wall -Wextra  -Werror -pedantic -O4 -o somm3 Trois_Sommes.c
$ ./somm3
Temps en sec pour 100 : 0.00000
Temps en sec pour 200 : 0.000000
Temps en sec pour 400 : 0.020000
Temps en sec pour 800 : 0.090000
Temps en sec pour 1600 : 0.720000
Temps en sec pour 3200 : 5.760000
Temps en sec pour 6400 : 45.619999
Temps en sec pour 12800 : 360.839996
```

On a la même évolution en N^3 avec un rapport de 8 entre chaque doublement de taille mais la constante est bien meilleure :

$45,61 = a \times 6400^3$ d'où $a \approx 1,74 \times 10^{-10}$

$360,84 = a \times 12800^3$ d'où $a \approx 1.72 \times 10^{-10}$

On a la même évolution en N^3 avec un rapport de 8 entre chaque doublement de taille mais la constante est bien meilleure :
$45,61 = a \times 6400^3$ d'où $a \approx 1,74 \times 10^{-10}$
$360,84 = a \times 12800^3$ d'où $a \approx 1.72 \times 10^{-10}$

```python
def trois_sommes(xs):
    N = len(xs)
    cpt = 0
    for i in range(N):
        for j in range(i + 1, N):
            for k in range(j + 1, N):
                if xs[i] + xs[j] + xs[k] == 0:
                    cpt += 1
    return cpt
```

```python
def trois_sommes(xs):
    N = len(xs)
    cpt = 0
    for i in range(N):
        xi = xs[i]
        for j in range(i + 1, N):
            sij = xi + xs[j]
            for k in range(j + 1, N):
                if sij + xs[k] == 0:
                    cpt += 1
    return cpt
```

```
In [28]:  xs = list(range(-50,51))
In [29]: %timeit trois_sommes(xs)
100 loops, best of 3: 12.9 ms per loop

In [30]:  xs = list(range(-100,101))
In [31]: %timeit trois_sommes(xs)
10 loops, best of 3: 94.4 ms per loop

In [32]:  xs = list(range(-200,201))
In [33]: %timeit trois_sommes(xs)
1 loops, best of 3: 851 ms per loop

In [34]:  xs = list(range(-400,401))
In [35]: %timeit trois_sommes(xs)
1 loops, best of 3: 7.04 s per loop
```

Loi de Brooks

Adding manpower to a late software project makes it later » a result of the fact that the expected advantage from splitting work among N programmers is $O(N)$, but the complexity and communications cost associated with coordinating and then merging their work is $O(N^2)$

Définition 1 (« Grand O »)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est un « grand O » de g et on note $f = O(g)$ ou $f(n) = O(g(n))$ si, et seulement si, il existe une constante strictement positive C telle que $|f(n)| \leqslant C|g(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2 (« Grand Oméga »)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On dit que f est un « grand Oméga » de g et on note $f = \Omega(g)$ ou $f(n) = \Omega(g(n))$ si, et seulement si, il existe une constante strictement positive C telle que $|f(n)| \geqslant C|g(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3 (« Grand Théta »)

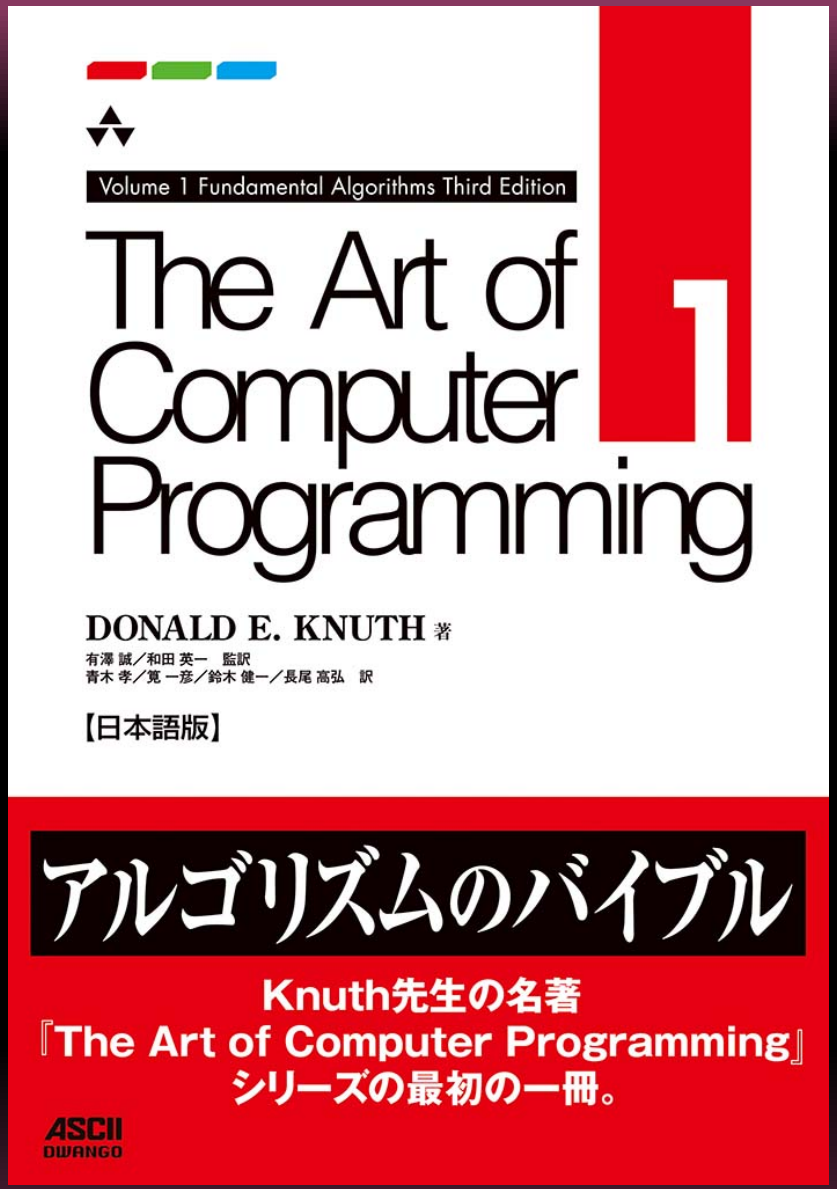
$f = \Theta(g) \iff f = O(g) \quad \wedge \quad f = \Omega(g)$

coût \ n	100	1000	10^6	10^9
$\log_2(n)$	≈ 7	≈ 10	≈ 20	≈ 30
$n\log_2(n)$	≈ 665	$\approx 10\,000$	$\approx 2 \cdot 10^7$	$\approx 3 \cdot 10^{10}$
n^2	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}
n^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}
2^n	$\approx 10^{30}$	$> 10^{300}$	$> 10^{10^5}$	$> 10^{10^8}$

Gardez en tête que l'âge de l'Univers est environ de 10^{18} secondes...

coût \ n	100	1000	10^6	10^9
$\log_2(n)$	≈ 7	≈ 10	≈ 20	≈ 30
$n\log_2(n)$	≈ 665	$\approx 10\,000$	$\approx 2 \cdot 10^7$	$\approx 3 \cdot 10^{10}$
n^2	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}
n^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}
2^n	$\approx 10^{30}$	$> 10^{300}$	$> 10^{10^5}$	$> 10^{10^8}$

Gardez en tête que l'âge de l'Univers est environ de 10^{18} secondes...


Volume 1 Fundamental Algorithms Third Edition
The Art of Computer Programming
1
DONALD E. KNUTH 著
有澤 誠／和田 英一 監訳
青木 孝／寒 一彦／鈴木 健一／長尾 高弘 訳
【日本語版】
アルゴリズムのバイブル
Knuth先生の名著
『The Art of Computer Programming』
シリーズの最初の一冊。
ASCII
DWANGO

```python
def trois_sommes(xs):
    N = len(xs)
    cpt = 0
    for i in range(N):
        xi = xs[i]
        for j in range(i + 1, N):
            sij = xi + xs[j]
            for k in range(j + 1, N):
                if sij + xs[k] == 0:
                    cpt += 1
    return cpt
```

OPÉRATION	FRÉQUENCE
Déclaration de la fonction et du paramètre (l. 1)	2
Déclaration de N, cpt et i (l. 2, 3 et 4)	3
Affectation de N, cpt et i (l. 2, 3 et 4)	3
Déclaration de xi (l. 5)	N
Affectation de xi (l. 5)	N
Accès à xs[i] (l. 5)	N
Déclaration de j (l.6)	N
Calcul de l'incrément de i (l. 6)	N
Affectation de j (l.6)	N

OPÉRATION	FRÉQUENCE
Déclaration de sij (l. 7)	S_1
Affectation de sij (l. 7)	S_1
Accès à xs[j] (l.7)	S_1
Somme (l.7)	S_1
Déclaration de k (l.8)	S_1
Incrément de j (l. 8)	S_1
Affectation de k (l.8)	S_1
Accès à x[k] (l.9)	S_2
Calcul de la somme (l.9)	S_2
Comparaison à 0 (l.9)	S_2
Incrément de cpt (l.9)	entre 0 et S_2
Affectation de la valeur de retour (l.11)	1

Calcul

Que valent S_1 et S_2 ?

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N-1} N - (i+1) = \sum_{i'=0}^{N-1} i' = \frac{N(N-1)}{2} \qquad (\text{avec } i' = N - (i+1))$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} N-(j+1) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-(i+2)} j' \qquad (j' = N-(j+1)) \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} \frac{(N-(i+2))(N-(i+1))}{2} \\
&= \sum_{i'=1}^{N-2} \frac{i'(i'+1)}{2} \qquad (i' = N-(i+2)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N-2} i'^2 + \sum_{i=1}^{N-2} i'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(N-2)(2N-3)(N-1)}{6} + \frac{(N-2)(N-1)}{2}\right) \\
&= \frac{N(N-1)(N-2)}{6}
\end{aligned}
$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration, x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) \equiv O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) \equiv O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Notons a le temps constant d'affectation, d le temps constant de déclaration,x le temps constant d'accès à une cellule, s le temps constant d'une somme, c le temps constant d'une comparaison.
Le temps d'exécution vérifie :

$$\tau(N) \leqslant (2d + 3d + 3a + a) + (d + a + x + d + s + a)N + (d + a + x + s + d + s + a)S_1 + (x + s + c + s)S_2 \quad (1)$$

Or $S_1 \sim N^2$ et $S_2 \sim N^3$ quand N est « grand ».
Finalement...

$$\tau(N) = O(N^3)$$

Sommaire

Addition de deux entiers de n chiffres : $O(n)$

Multiplier un entier de n chiffres par un entier de 1 chiffre : $O(n)$

Algorithme de l'école primaire pour multiplier deux nombres de n chiffres : n multiplications d'un nombre de n chiffres par un nombre de 1 chiffre puis une addition des n nombres obtenus : $O(n^2)$

Addition de deux entiers de n chiffres : $O(n)$

Multiplier un entier de n chiffres par un entier de 1 chiffre : $O(n)$

Algorithme de l'école primaire pour multiplier deux nombres de n chiffres : n multiplications d'un nombre de n chiffres par un nombre de 1 chiffre puis une addition des n nombres obtenus : $O(n^2)$

Addition de deux entiers de n chiffres : $O(n)$
Multiplier un entier de n chiffres par un entier de 1 chiffre : $O(n)$
Algorithme de l'école primaire pour multiplier deux nombres de n chiffres : n multiplications d'un nombre de n chiffres par un nombre de 1 chiffre puis une addition des n nombres obtenus : $O(n^2)$

Addition de deux entiers de n chiffres : $O(n)$
Multiplier un entier de n chiffres par un entier de 1 chiffre : $O(n)$
Algorithme de l'école primaire pour multiplier deux nombres de n chiffres : n multiplications d'un nombre de n chiffres par un nombre de 1 chiffre puis une addition des n nombres obtenus : $O(n^2)$

Addition de deux entiers de n chiffres : $O(n)$
Multiplier un entier de n chiffres par un entier de 1 chiffre : $O(n)$
Algorithme de l'école primaire pour multiplier deux nombres de n chiffres : n multiplications d'un nombre de n chiffres par un nombre de 1 chiffre puis une addition des n nombres obtenus :$O(n^2)$

$O(n^2)$: multiplication de nombres deux fois plus petits $\longrightarrow$ quatre fois plus rapide ?

$$xy = (10^m x_1 + x_2)(10^m y_1 + y_2) = 10^{2m} x_1 y_1 + 10^m (x_2 y_1 + x_1 y_2) + x_2 y_2$$

```
Fonction MUL(x:entier ,y: entier):entier
Si n==1 Alors
    Retourner x.y
Sinon
    m ← ⌊n/2⌋
    x_1 ← ⌊x/10^m⌋
    x_2 ← x mod 10^m
    y_1 ← ⌊y/10^m⌋
    y_2 ← y mod 10^m
    a ← MUL(x_1,y_1,m)
    b ← MUL(x_2,y_1,m)
    c ← MUL(x_1,y_2,m)
    d ← MUL(x_2,y_2,m)
    Retourner 10^{2m}a + 10^m(b + c) + d
FinSi
```

Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k, \quad x_0 = 1$$

Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k \qquad x_0 = 1$$

Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k \qquad x_0 = 1$$

Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k \qquad x_0 = 1$$

Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k \qquad x_0 = 1$$

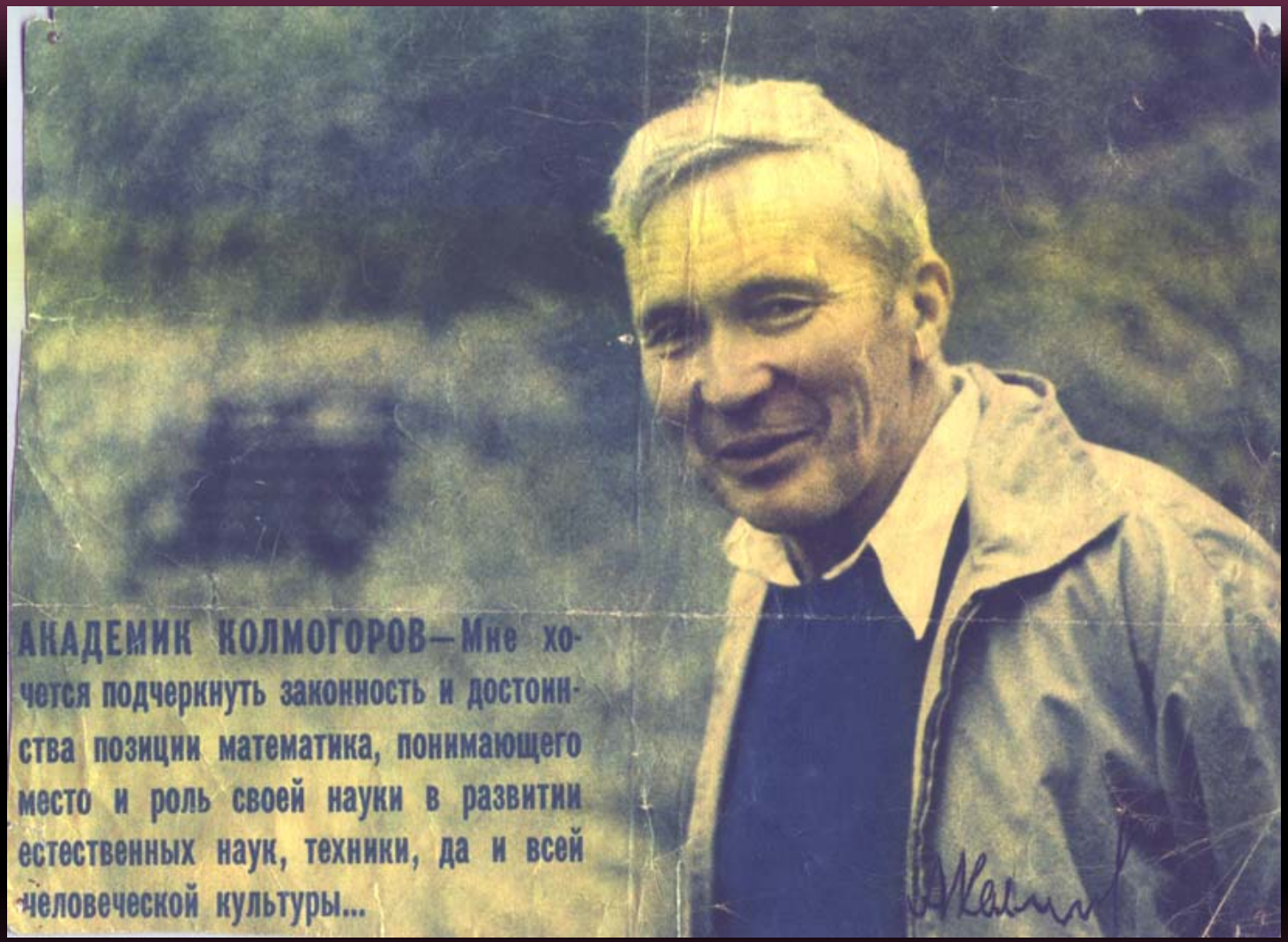
Les divisions et les multiplications par des puissances de 10 ne sont que des décalages effectués en temps constant. L'addition finale est en λn donc le temps d'exécution est défini par :

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + \lambda n \qquad T(1) = 1$$

$$n = 2^k \qquad T(n) = T(2^k) = x_k$$

$$x_k = 4x_{k-1} + \lambda 2^k \qquad x_0 = 1$$

$$
\begin{aligned}
x_k &= 4(4x_{k-2} + \lambda' 2^{k-1}) + \lambda 2^k \\
&= 4^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} \Lambda_k 2^k \\
&= 4^k + k\Lambda_k 2^k \\
&= n^2 + \Lambda_k n \log n \\
&= \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$


АКАДЕМИК КОЛМОГОРОВ — Мне хочется подчеркнуть законность и достоинства позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры...

$$bc + ad = ac + bd - (a - b)(c - d)$$

$$bc + ad = ac + bd - (a - b)(c - d)$$

Recherche

En quoi cela simplifie le problème ? Quelle est alors la nouvelle complexité ?

Sommaire

Sun Zi (544–496 av. J.-C.)

Le commandement du grand nombre est le même pour le petit nombre, ce n'est qu'une question de division en groupes.

in « L'art de la guerre » de Sun Zi (VI^e siècle avant JC)

Sun Zi (544–496 av. J.-C.)

Le commandement du grand nombre est le même pour le petit nombre, ce n'est qu'une question de division en groupes.

in « L'art de la guerre » de Sun Zi (VI^{e} siècle avant JC)

On considère un problème de taille n qu'on découpe en a sous-problèmes de taille n/b avec a et b des entiers. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = a \times T(n/b) + \text{Reconstruction(n)} \end{cases}$$

En général la reconstruction est de l'ordre de $c \times n^{\alpha}$.
Par exemple, pour l'algorithme de КАРАЦУБА nous avions

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 1$ et c quelconque avec n pair.

On considère un problème de taille n qu'on découpe en a sous-problèmes de taille n/b avec a et b des entiers. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = a \times T(n/b) + \text{Reconstruction(n)} \end{cases}$$

En général la reconstruction est de l'ordre de $c \times n^{\alpha}$.
Par exemple, pour l'algorithme de КАРАЦУБА nous avions

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 1$ et c quelconque avec n pair.

On considère un problème de taille n qu'on découpe en a sous-problèmes de taille n/b avec a et b des entiers. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = a \times T(n/b) + \text{Reconstruction(n)} \end{cases}$$

En général la reconstruction est de l'ordre de $c \times n^{\alpha}$.
Par exemple, pour l'algorithme de КАРАЦУБА nous avions

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 1$ et c quelconque avec n pair.

On considère un problème de taille n qu'on découpe en a sous-problèmes de taille n/b avec a et b des entiers. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = a \times T(n/b) + \text{Reconstruction(n)} \end{cases}$$

En général la reconstruction est de l'ordre de $c \times n^{\alpha}$.
Par exemple, pour l'algorithme de КАРАЦУБА nous avions

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 1$ et c quelconque avec n pair.

On considère un problème de taille n qu'on découpe en a sous-problèmes de taille n/b avec a et b des entiers. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = a \times T(n/b) + \text{Reconstruction(n)} \end{cases}$$

En général la reconstruction est de l'ordre de $c \times n^{\alpha}$.
Par exemple, pour l'algorithme de КАРАЦУБА nous avions

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 1$ et c quelconque avec n pair.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n-1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n-1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + cn^{\alpha} \\
&= a^2 T(n/b^2) + ac(n/b)^{\alpha} + cn^{\alpha} \\
&= \cdots \\
&= a^k T(n/b^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i c(n/b^i)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$n = b^{k_n}$

$$
T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n-1} (a/b^{\alpha})^i
$$

$$T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i$$

1. $a > b^{\alpha}$ alors la somme géométrique est équivalente au premier terme négligé à une constante multiplicative et additive près $\left(\frac{1}{a/b^{\alpha}-1}\left(\frac{a}{b^{\alpha}}\right)^{k_n} - \frac{1}{a/b^{\alpha}-1}\right)$ à savoir $(a/b^{\alpha})^{k_n}$ et $T(n) = O(a^{k_n})$ soit $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$
2. $a = b^{\alpha}$ alors $T(n) = O(n^{\alpha} \log_b(n))$
3. $a < b^{\alpha}$ alors la série géométrique est convergente. Si $c(a/b^{\alpha})^{k_n} \leq (a/b^{\alpha})^{k_n}$ alors $c \leq b^{\alpha}$ donc $\log_b(c) \leq \alpha$ finalement $T(n) = O(n^{\alpha})$

$$T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i$$

1. $\boxed{a > b^{\alpha}}$ alors la somme géométrique est équivalente au premier terme négligé à une constante multiplicative et additive près $(\frac{1}{a/b^{\alpha}-1} \left(\frac{a}{b^{\alpha}}\right)^{k_n} - \frac{1}{a/b^{\alpha}-1})$ à savoir $(a/b^{\alpha})^{k_n}$ et $T(n) = O(a^{k_n})$ soit $\boxed{T(n) = O(n^{\log_b(a)})}$
2. $\boxed{a = b^{\alpha}}$ alors $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha} \log_b(n))}$
3. $\boxed{a < b^{\alpha}}$ alors la série géométrique est convergente : $S(n) \approx n^{\log_b(a)} + cn^{\alpha}/(1 - a/b^{\alpha})$ or $a < b^{\alpha}$ donc $\log_b(a) < \alpha$. Finalement $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha})}$

$$T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i$$

1. $\boxed{a > b^{\alpha}}$ alors la somme géométrique est équivalente au premier terme négligé à une constante multiplicative et additive près $(\frac{1}{a/b^{\alpha}-1} \left(\frac{a}{b^{\alpha}}\right)^{k_n} - \frac{1}{a/b^{\alpha}-1})$ à savoir $(a/b^{\alpha})^{k_n}$ et $T(n) = O(a^{k_n})$ soit $\boxed{T(n) = O(n^{\log_b(a)})}$
2. $\boxed{a = b^{\alpha}}$ alors $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha} \log_b(n))}$
3. $\boxed{a < b^{\alpha}}$ alors la série géométrique est convergente : $S(n) \approx n^{\log_b(a)} + cn^{\alpha}/(1 - a/b^{\alpha})$ or $a < b^{\alpha}$ donc $\log_b(a) < \alpha$. Finalement $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha})}$

$$T(n) = a^{k_n} + cn^{\alpha} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (a/b^{\alpha})^i$$

1. $\boxed{a > b^{\alpha}}$ alors la somme géométrique est équivalente au premier terme négligé à une constante multiplicative et additive près $(\frac{1}{a/b^{\alpha}-1} \left(\frac{a}{b^{\alpha}}\right)^{k_n} - \frac{1}{a/b^{\alpha}-1})$ à savoir $(a/b^{\alpha})^{k_n}$ et $T(n) = O(a^{k_n})$ soit $\boxed{T(n) = O(n^{\log_b(a)})}$
2. $\boxed{a = b^{\alpha}}$ alors $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha} \log_b(n))}$
3. $\boxed{a < b^{\alpha}}$ alors la série géométrique est convergente : $S(n) \approx n^{\log_b(a)} + cn^{\alpha}/(1 - a/b^{\alpha})$ or $a < b^{\alpha}$ donc $\log_b(a) < \alpha$. Finalement $\boxed{T(n) = O(n^{\alpha})}$

En fait, on peut démontrer (cf CORMEN pp. 86-97) que les O sont des Θ et considérer des fonctions de reconstruction plus générales..
Pour revenir à l'algorithme de КАРАЦУБА , $a = 3$ et $b^{\alpha} = 2$ donc $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

Sommaire

Sommaire

Expérience informatique

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- k actionnaires
- $N = 2^n$ étages
- RDC = 0
- Il existe un étage fatal
- RDC non fatal
- Minimiser le nombre d'essais

- Première idée : on commence au rez-de-chaussée et on progresse d'un étage.
- Combien d'essais au pire ?
- En moyenne

- Première idée : on commence au rez-de-chaussée et on progresse d'un étage.
- Combien d'essais au pire ?
- En moyenne

- Première idée : on commence au rez-de-chaussée et on progresse d'un étage.
- Combien d'essais au pire ?
- En moyenne

Sommaire

```
inf ← Étage inférieur
sup ← Étage supérieur
milieu ← (inf + sup)/2
Si estFatal(milieu) Alors
 | ChercherEntre(inf,milieu)
Sinon
 | ChercherEntre(milieu, sup)
FinSi
```

```
Fonction ChercherEntre(inf, sup : Entiers) : Entier
{ pré-condition: il existe au moins un étage fatal entre inf et sup }
{ invariant: le plus petit étage fatal est entre inf et sup }
{ post-condition: la valeur retrournée est le plus petit étage fatal }
Si sup == inf Alors
 | Retourner sup
Sinon
 | milieu ← (inf + sup)/2
 | Si estFatal(milieu) Alors
 | | ChercherEntre(inf,milieu)
 | Sinon
 | | ChercherEntre(milieu, sup)
 | FinSi
FinSi
```

```
{ pré-cond.: il existe un étage fatal entre inf et sup, inf n'est pas fatal et inf < sup }
{ invariant: le plus petit étage fatal est entre inf (non compris) et sup }
{ post-condition: la valeur retournée est le plus petit étage fatal }
inf,sup ← 0, N
TantQue sup > inf + 1 Faire
|  { le plus petit étage fatal est entre inf (non compris) et sup et sup > inf + 1 }
|  milieu ← (inf + sup)/2
|  Si estFatal(milieu) Alors
|  |  sup = milieu
|  Sinon
|  |  inf = milieu
|  FinSi
FinTantQue
{ le plus petit étage fatal est entre inf (non compris) et sup et sup = inf + 1 }
Retourner sup
{ la valeur retournée est le plus petit étage fatal }
```

1. étude de la *terminaison* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie effectivement une valeur ?
2. étude le la *correction* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie la valeur attendue ?
3. étude de la *complexité* de l'algorithme : peut-on estimer la vitesse d'exécution de cet algorithme ?

1. étude de la *terminaison* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie effectivement une valeur ?
2. étude le la *correction* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie la valeur attendue ?
3. étude de la *complexité* de l'algorithme : peut-on estimer la vitesse d'exécution de cet algorithme ?

1. étude de la *terminaison* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie effectivement une valeur ?
2. étude le la *correction* de l'algorithme : est-ce que la fonction renvoie la valeur attendue ?
3. étude de la *complexité* de l'algorithme : peut-on estimer la vitesse d'exécution de cet algorithme ?

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION : l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ :

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION : l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITE :

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION : l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est $2^n - 1$ (on ne compte pas la condition de sortie de la dernière itération).

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est à l'étape n que l'on atteint la condition de sortie de l'algorithme.

  Que vaut n ?

  On a posé au départ que le nombre d'étages était une puissance de 2 : $N = 2^n$. Ainsi, $n = \log_2 N$.

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est à l'étape n que l'on atteint la condition de sortie de l'algorithme.

  Que vaut n ?

  On a posé au départ que le nombre d'étages était une puissance de 2 : $N = 2^n$. Ainsi, $n = \log_2 N$.

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est à l'étape n que l'on atteint la condition de sortie de l'algorithme.

  Que vaut n ?

  On a posé au départ que le nombre d'étages était une puissance de 2 : $N = 2^n$. Ainsi, $n = \log_2 N$.

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est à l'étape n que l'on atteint la condition de sortie de l'algorithme.

  Que vaut n ?

  On a posé au départ que le nombre d'étages était une puissance de 2 : $N = 2^n$. Ainsi, $n = \log_2 N$.

- TERMINAISON : $\ell_i = \frac{N}{2^i} = \frac{2^n}{2^i} = 2^{n-i} \quad \ell_n = 1$
- CORRECTION :l'invariant est vérifié à chaque itération
- COMPLEXITÉ : il suffit donc de compter combien de lancers ont été effectués. La réponse est dans l'étude faite pour prouver la terminaison : c'est à l'étape n que l'on atteint la condition de sortie de l'algorithme.

  Que vaut n ?

  On a posé au départ que le nombre d'étages était une puissance de 2 : $N = 2^n$. Ainsi, $n = \log_2 N$.

Sommaire

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau (un immeuble)

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau (un immeuble)
- de 2^{10} nombres (...)

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau (un immeuble)
- de 2^{10} nombres

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau (un immeuble)
- de 2^{10} nombres (étages).

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau(un immeuble)
- de 2^{10} nombres (étages)

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau(un immeuble)
- de 2^{10} nombres (étages)

Cherchons une approximation de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 2^{-10} entre 1 et 2. Il va falloir chercher :

- un nombre (un étage)
- dans un tableau(un immeuble)
- de 2^{10} nombres (étages)

1	$1+2^{-10}$	$1+2\times 2^{-10}$	$1+3\times 2^{-10}$	$\cdots$	$1+2^{10}\times 2^{-10}$

Notre fonction booléenne « estFatal » est alors le test $x \mapsto \mathrm{x} * \mathrm{x} <= 2$ et l'on va chercher une cellule de ce tableau par dichotomie comme on cherchait un étage dans un immeuble.

1	$1+2^{-10}$	$1+2\times 2^{-10}$	$1+3\times 2^{-10}$	$\cdots$	$1+2^{10}\times 2^{-10}$

Notre fonction booléenne « estFatal » est alors le test $x \mapsto \mathtt{x} * \mathtt{x} <= 2$ et l'on va chercher une cellule de ce tableau par dichotomie comme on cherchait un étage dans un immeuble.

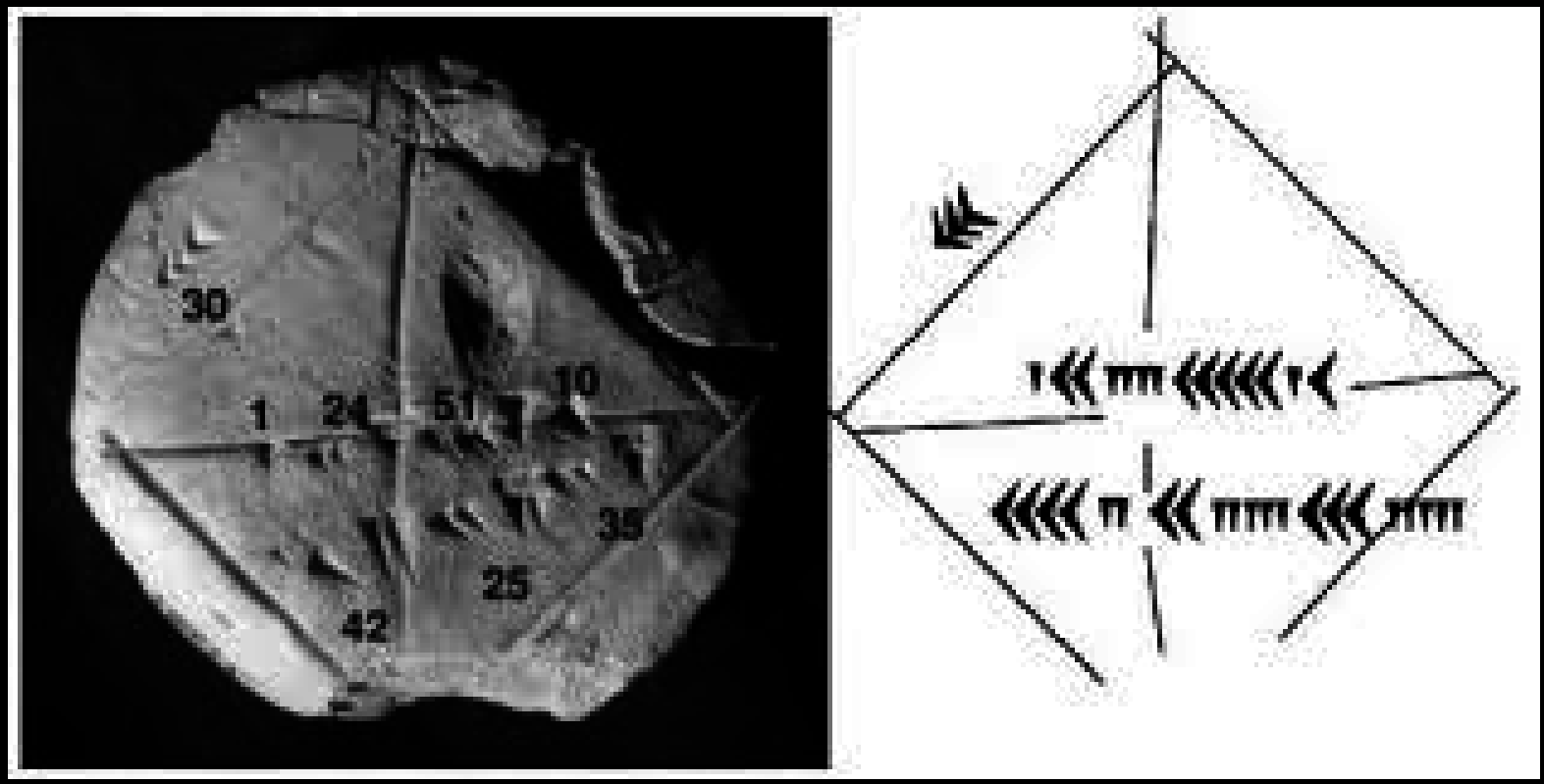
```
def racineDicho(prec):
    cpt = 0
    inf = 1
    sup = 2
    while (sup - inf > prec):
        m = inf + (sup - inf) / 2
        cpt += 1
        if m*m <= 2:
            inf = m
        else:
            sup = m
    return sup,cpt
```

```
In [1]: racineDicho(2**(-10))
Out[1]: (1.4150390625, 10)

In [2]: racineDicho(2**(-15))
Out[2]: (1.414215087890625, 15)

In [3]: racineDicho(2**(-20))
Out[3]: (1.4142141342163086, 20)

In [4]: racineDicho(2**(-30))
Out[4]: (1.4142135623842478, 30)

In [5]: racineDicho(2**(-50))
Out[5]: (1.4142135623730958, 50)
```

Sommaire

Sommaire


ΗΡΩΝ
ΟΦΙΛΟΣΟ
Φ


30
1
24
51
10
35
25
42

« Puisque alors les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi. Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 : il en résulte 26 et deux tiers. Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers. De ceux-ci la moitié : il en résulte 26 2' 3'. Le côté approché de 720 sera donc 26 2' 3'. En effet 26 2' 3' par eux-mêmes : il en résulte 720 36', de sorte que la différence est une 36e part d'unité. Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le 36', au lieu de 729, nous placerons les 720 et 36' maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au 36'. »

Héron d'Alexandrie, Metrica, tome I, 8

- Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ et vice-versa.
- La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.
- On peut montrer que c'est une approximation par excès (en développant $\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$ par exemple).

- Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ et vice-versa.
- La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.
- On peut montrer que c'est une approximation par excès (en développant $\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$ par exemple).

- Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ et vice-versa.
- La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.
- On peut montrer que c'est une approximation par excès (en développant $\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$ par exemple).

```
Fonction heron_rec( a,fo : Réels  n : Entier ) : Réel
Si n = 0 Alors
 | Retourner 0
Sinon
 | Retourner heron_rec(a,(fo + a / fo) / 2, n - 1)
FinSi
Fonction heron_it( a,fo : Réels  n : Entier ) : Réel
app ← 0
Pour k de 0 à n - 1 Faire
 | app ← (app + a / app) / 2
FinPour
Retourner app
```

Sommaire

Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Théorème du point fixe

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I et soit (x_n) une suite d'éléments de I telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n. Si (x_n) est convergente alors sa limite est l'unique point fixe de f appartenant à I.

Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Théorème light du point fixe

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I et soit (r_n) une suite d'éléments de I telle que $r_{n+1} = f(r_n)$ pour tout entier naturel n. SI (r_n) est convergente ALORS sa limite est UN point fixe de f appartenant à I.

Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Théorème light du point fixe

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I et soit (r_n) une suite d'éléments de I telle que $r_{n+1} = f(r_n)$ pour tout entier naturel n. SI (r_n) est convergente ALORS sa limite est UN point fixe de f appartenant à I.

$$r_{n+1} = f(r_n) = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2} \qquad r_0 = 1$$

1. pour tout entier naturel non nul n, on a $r_n \geqslant \sqrt{2}$;
2. la suite est décroissante ;
3. $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe positif de f.

$$r_{n+1} = f(r_n) = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2} \qquad r_0 = 1$$

1. pour tout entier naturel non nul n, on a $r_n \geqslant \sqrt{2}$;
2. la suite est décroissante ;
3. $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe positif de f.

$$r_{n+1} = f(r_n) = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2} \qquad r_0 = 1$$

1. pour tout entier naturel non nul n, on a $r_n \geqslant \sqrt{2}$;
2. la suite est décroissante ;
3. $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe positif de f.

$$r_{n+1} = f(r_n) = \frac{r_n + \frac{2}{r_n}}{2} \qquad r_0 = 1$$

1. pour tout entier naturel non nul n, on a $r_n \geqslant \sqrt{2}$;
2. la suite est décroissante ;
3. $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe positif de f.

Sommaire

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left| r_{n+1} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n} \right|$$

$$\left| r_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leqslant \left| (r_n - \sqrt{2})^2 \right|$$

$$d_n = -\log_{10} |r_n - \sqrt{2}| \quad \dots \quad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n}\right|$$

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|(r_n - \sqrt{2})^2\right|$$

$$d_n = -\log_{10}\left|r_n - \sqrt{2}\right| \quad \ldots \quad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left| r_{n+1} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n} \right|$$

$$\left| r_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leqslant \left| (r_n - \sqrt{2})^2 \right|$$

$$d_n = -\log_{10} |r_n - \sqrt{2}| \qquad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n}\right|$$

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|(r_n - \sqrt{2})^2\right|$$

$$d_n = -\log_{10}|r_n - \sqrt{2}| \qquad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n}\right|$$

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|(r_n - \sqrt{2})^2\right|$$

$$d_n = -\log_{10}|r_n - \sqrt{2}| \qquad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n}\right|$$

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|(r_n - \sqrt{2})^2\right|$$

$$d_n = -\log_{10}|r_n - \sqrt{2}| \qquad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Définition : ordre d'une suite

Soit (r_n) une suite convergeant vers ℓ. S'il existe un entier $k > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|r_{n+1} - \ell|}{|r_n - \ell|^k} = C$$

avec $C \neq 0$ et $C \neq +\infty$.
On dit que (r_n) est d'ordre k et que C est la constante asymptotique d'erreur.

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r_n - \sqrt{2})^2}{2r_n}\right|$$

$$\left|r_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|(r_n - \sqrt{2})^2\right|$$

$$d_n = -\log_{10}|r_n - \sqrt{2}| \qquad d_{n+1} \geqslant 2d_n$$

Prochaine étape : les tris