QUATRIÈME LEÇON

LES COMPLEXES

Résumé Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I - COURS

1 - Pourquoi utilise-t-on les complexes ?

Pour résoudre des équations

• Combien l'équation $x^3 + px + q = 0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXI$^{\text{ème}}$, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.

Considérons donc la fonction $f : x \mapsto x^3 + px + q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe.

Maintenant, calculons la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 + p$. Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

– $\mathbf{p \geqslant 0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.

– **p < 0** : alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$. On obtient donc le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.
On montre que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.

Alors $f(a) \cdot f(-a) =$
On peut enfin remarquer que $f(a) < f(-a)$ car
Entamons donc la discussion

- ▹ Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.

- ▹ Si

- ▹ Si

• **Résolvons ces équations**

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.

Giralomo Cardano a établi[1] en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(\mathrm{E}_1)\ :\ x^3-36x-91=0$

On voudrait faire de même avec $(\mathrm{E}_2)\ :\ x^3-15x-4=0$. Un problème apparaît...

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$ et utilisons quand même la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce : calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$: faites-le ! (Font) Font shape 'T1/futs/b/n' tried instead on input line 18. LaTeX Font Info: Font shape 'FMX/futm/m/n' will be

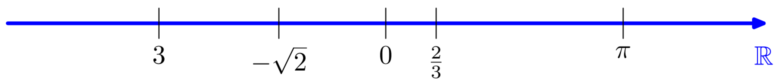
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

1. Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x=u+v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Evariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

Pour compter en dimension 2

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[2], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.

(Font) Font shape 'T1/futs/b/n' tried instead on input line 18. LaTeX Font Info: Font shape 'FMX/futm/m/n' will be Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[3]:

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2.

Téhessin : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessin : Ben pour l'addition, on fait $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.

Mathémator : Pourquoi pas! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessin : On a un élément neutre : (0,0) car $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$.

Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessin : Et pour le symétrique, on prend $(-x,-y)$ car $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ l'élément neutre.

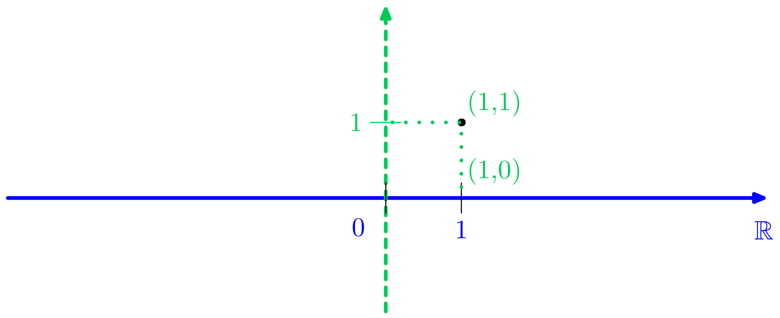
Mathémator : En effet. Et pour la multiplication?

Téhessin : Ça doit être pareil : $(x,y)\times(x',y')=(xx',yy')$ avec (1,1) comme élément neutre.

2. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

3. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4$^{\text{ème}}$ et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre $(1{,}0)$ et donc que $(x,y)\times(1{,}0)=(x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

Téhessin : Fichtre! Essayons : $(x,y)\times(1{,}0)=(x\times1-y\times0,x\times0+y\times1)=(x,y)$. Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0{,}0)$ admet un inverse $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Téhessin : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0{,}1)$ et élevez le au carré.

Téhessin : Allons-y : $(0{,}1)\times(0{,}1)=(0-1{,}0+0)=(-1{,}0)$, bon et alors?

Mathémator : Alors $(-1{,}0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0{,}1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessin : Naturellement, c'est beaucoup dire! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.

L'idée vient de l'observation *intuitive*[4] : « $(x,y)\curvearrowright x\cdot(1{,}0)+y\cdot(0{,}1)\curvearrowright x\times1+y\times\sqrt{-1}\curvearrowright x+y\sqrt{-1}$ »

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessin : Si vous le dites : $(x+iy)+(x'+iy')=x+iy+x'+iy'=(x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$, mais en plus simple.

Téhessin : Et $(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$

4. Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Mathémator : N'oubliez pas que $i^2 = -1$

Téhessin : Alors $(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',xy' + yx')$.

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

2 - Vocabulaire et premières propriétés

Suite à la discussion de nos deux compères :

Théorème IV-1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- ▷ muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- ▷ contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- ▷ tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.

Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathscr{R}e(z)$

Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathscr{I}m(z)$

⚠ $\mathscr{I}m(z)$ est un nombre réel.

À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x + 3y - 5 + i(7x - 32y + 1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0 + i \cdot 0$.

Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x + 3y - 5 + i(7x - 32y + 1) = 0 \Longleftrightarrow: \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 7x - 32y + 1 = 0 \end{cases}$$

Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$

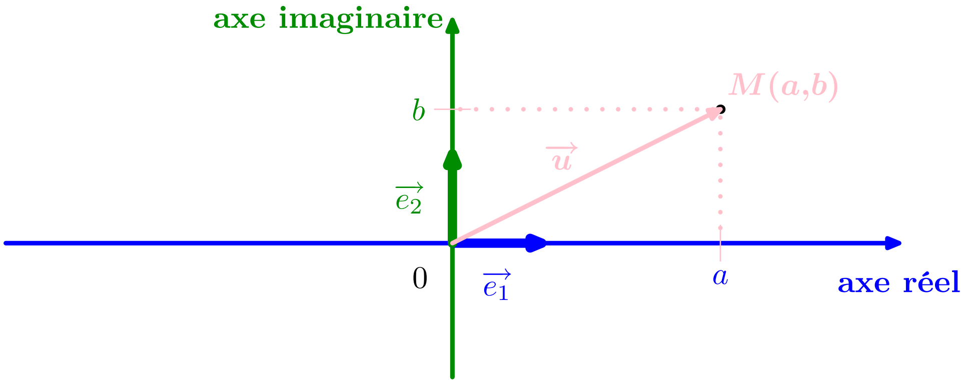


Figure 1 –

À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a,b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent $\mathrm{M}(z)$.

Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a,b), on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_M.

Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a,b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + ib$

Premiers calculs géométriques

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a,b) et (a',b'), alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a')\overrightarrow{e_1} + (b + b')\overrightarrow{e_2}$, donc

$$\boxed{z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}}$$

- De même, si λ est un nombre réel

$$\boxed{z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}}$$

- Alors, si I est le **milieu** du segment [A,B], on a

$$\boxed{z_\mathrm{I} = \frac{1}{2}(z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B})}$$

- Plus généralement, si G est le barycentre du système $\left\{(\mathrm{A}_1,\alpha_1),(\mathrm{A}_2,\alpha_2),\cdots,(\mathrm{A}_n\alpha_n)\right\}$ alors

$$\boxed{z_\mathrm{G} = \frac{\alpha_1 z_{\mathrm{A}_1} + \alpha_2 z_{\mathrm{A}_2} + \cdots \alpha_n z_{\mathrm{A}_n}}{\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots \alpha_n}}$$

- Pour tous points A et B

$$\boxed{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}$$

Conjugué d'un complexe

Définition IV-1 Conjugué

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne

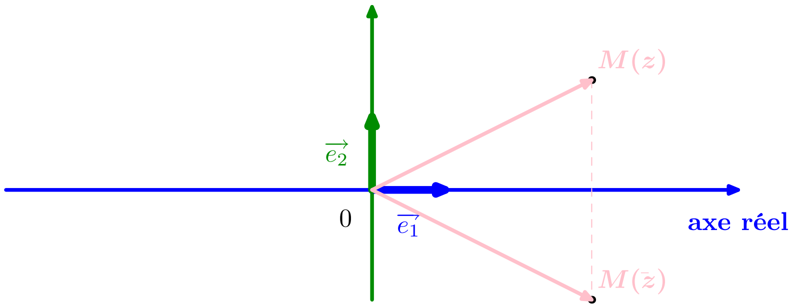


Figure 2 –

Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes

Propriété IV-1 Propriétés des conjugués

- ▷ M(z) et M$'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_1})$
- ▷ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- ▷ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- ▷ $\overline{\overline{z}} = z$
- ▷ $z \in \mathbb{R} \Leftarrow: z = \overline{z}$
- ▷ $z \in i\mathbb{R} \Leftarrow: z = -\overline{z}$
- ▷ $\mathscr{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- ▷ $\mathscr{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- ▷ Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

À quoi servent les conjugués ?

• À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel.

• À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2+i$,

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

Module d'un nombre complexe

Définition IV-2 Module

Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

Quelques remarques

▷ Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.

▷ Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\,\overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

• Interprétation géométrique

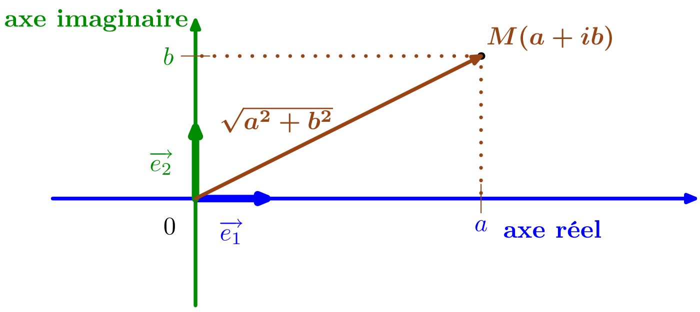


Figure 3 –

Nous venons de voir que, si $z = a + ib$, alors

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2+b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou encore la longueur OM.

$$\boxed{|z_{\mathrm{M}}| = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = \mathrm{OM} \qquad |z_{\overrightarrow{u}}| = \|\overrightarrow{u}\|}$$

• Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété IV-2 Modules

- ⊳ $\left|\overline{z}\right| = |z|$
- ⊳ $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- ⊳ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- ⊳ $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- ⊳ $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété IV-3 Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Comme il s'agit d'une démonstartion classique, nous allons la détailler. Elle pourra servir à d'autres occasions.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathscr{R}e(z_1z_2) \leqslant 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

3 - Résolution d'équations du second degré

Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

• Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

⊳ $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2 = \alpha \Longleftrightarrow (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions[5] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$
On connait : $z^2 = 4 \Longleftrightarrow z = -2$ ou $z = 2$

5. LA solution si $\alpha = 0$

▷ **$\alpha < 0$**: alors $z^2 = \alpha \Longleftrightarrow (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm i\sqrt{-\alpha}$
C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \Longleftrightarrow z = -2i$ ou $z = 2i$

• **Racine carrée d'un complexe non réel**

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Cherchons les racines carrées de $4+3i$, à savoir les nombres $a+ib$ tels que $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4+3i$. Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

C'est comme en 1ère : $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème IV-2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation

▷ Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$

▷ Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

▷ Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

4 - Forme trigonométrique

Argument d'un complexe non nul

• **Forme trigonométrique**

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires**. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).

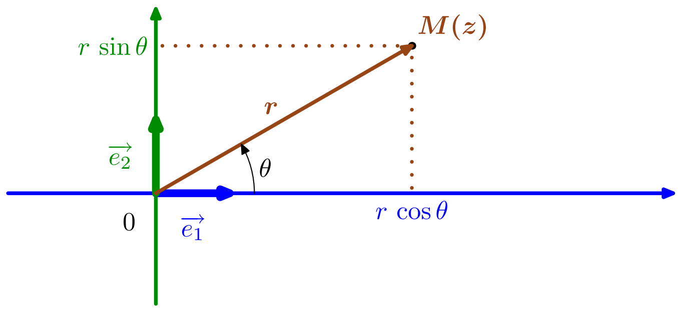


Figure 4 –

Ainsi, (r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z, on a $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

• Congruence modulo 2π

Vous rencontrerez souvent[6] la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π, c'est à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k \times 2\pi$. Retenons

$$\boxed{x \equiv y[2\pi] \Longleftarrow\text{: il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi}$$

Par exemple, vous savez que $\dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

• Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra

$$\boxed{\arg z \equiv \theta[2\pi]}$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32i \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

• Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part

$$\boxed{a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta}$$

et d'autre part

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

6. Cela doit titiller la mémoire des spécialistes

• Des formes trigonométriques de référence

▷ $1=\cos 0+i\sin 0$ donc $|1|=1$ et $\arg(1)\equiv 0[2\pi]$

▷ $i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i|=1$ et $\arg(i)\equiv\left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$

▷ $|1+i|=\sqrt{2}$ et $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i)\equiv\left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

▷ $|\sqrt{3}+i|=2$ et $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i)\equiv\left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right)$, alors

$$zz'=rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\right)+i\left(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz'=z=rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin(\theta+\theta)'\right)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

$$\boxed{\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]}$$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété IV-4 Propriétés algébriques des arguments

▷ $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$

▷ $\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

▷ $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$

▷ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

▷ $\arg(\overline{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$

▷ $\arg(-z)=\pi+\arg(z)\ [2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème IV-3 Formule de Moivre

$$\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)^n=\cos(n\theta)+j\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que

Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes

Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes

Mais revenons à nos premières amours : calculer en géométrie...

5 - Les objets géométriques et les complexes

De l'objet au complexe

• Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \Leftarrow: |z - z_{\mathrm{A}}| = \mathrm{R}$$

• Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc

$$\text{ABC isocèle de sommet principal A} \Leftarrow: |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \Leftarrow: \left|\frac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}\right| = 1$$

• Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|^2 + |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right) + \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftarrow: \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

• Comment caractériser les différents quadrilatères?

Petite révision de collège...

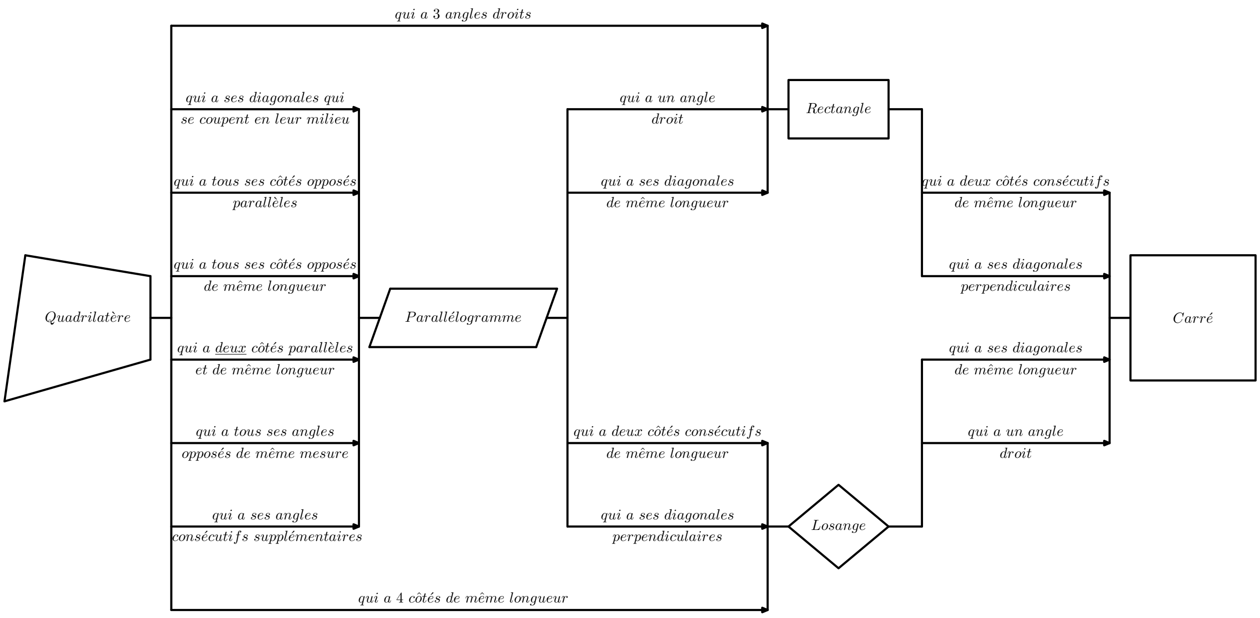


Figure 5 –

qu'il vous suffira d'adapter connaissant ce qui précède.

Du complexe à l'objet

• Que représente $z - 32 + 5i$ **?**

Soit A le point d'affixe $32 - 5i$ et M le point d'affixe z, alors $z - 32 + 5i = z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}$

• Comment interpréter $|z - 32 + 5i| = 3$ **?**

D'après ce qui précède, on aboutit à AM = 3 : il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

• Comment interpréter $|32 + iz| = 5$ **?**

$|32 + iz| = |i(-32i + z)| = |i| \times |z - 32i| = |z - 32i| = \mathrm{BM}$ avec M le point d'affixe z et B le point d'affixe $32i$. On retombe donc sur un cercle.

• Comment interpréter $|z - a| = |z - b|$ **?**

Soit M d'affixe z, A d'affixe a et B d'affixe b. Alors l'égalité se traduit par AM = BM, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

• **Que se cache-t-il derrière le quotient** $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **?**

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- ▷ $\arg(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
- ▷ $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}$, donc

- ▷ si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.
- ▷ si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm|\lambda| i z_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $\arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$ c'est à dire (AC)⊥(AB)
- ▷ si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

• **Comment interpréter** (MA,MB) $equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ **?**

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3+2i$, alors $-1 \times z = -3-2i$ et $i \times z = 3i+2i^2 = -2+3i$. Notons M, M′ et M″ les points d'**affixes** respectives z, $-z$ et iz

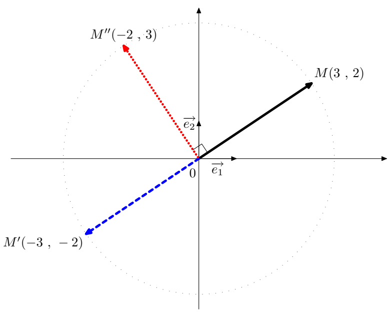


Figure 6 –

Ô monde merveilleux! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par -1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i, c'est à dire une multiplication par $i^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, $i.e.$ un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

II - EXERCICES

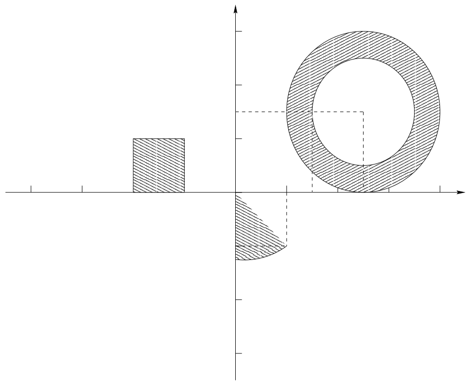
1 - exercices « originaux »

Problème ouvert : calcul de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$

En utilisant les racines carrées de $1+i$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$. Trouvez au moins deux autres méthodes de calcul en utilisant des formules trigonométriques.

Du dessin aux formules

Caractérisez les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :



Le crocodile se mord la queue ou comment visualiser une multiplication complexe

On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

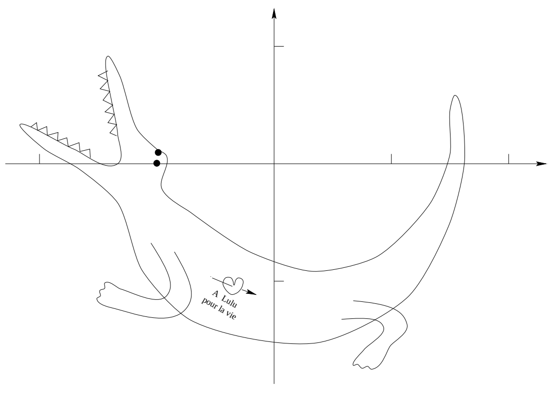


FIG. 7 –:

1. Écrivez les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire?
2. Dessinez une demi-droite issue de 0 et son image par φ.
3. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0? Placez aussi les images de quelques points particuliers du cercle.
4. « Dessinez l'image du crocodile ».
5. (plus facile) Dessinez de même l'image du croco par $z \mapsto z+1+2i$, $z \mapsto (\sqrt{3}+i)z$.

Les fractales

Les fractales sont des objets irréguliers dont l'étude a débuté il y a une trentaine d'années. Elles interviennent dans de nombreux domaines : modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, description mathématique de la surface d'un nuage, étude des mécanismes financiers, infographie, c'est à dire création d'algorithmes efficaces pour représenter des objets sur un écran d'ordinateur (avec un minimum de données transmises).

Nous allons étudier deux fractales simples : le tamis et le tapis de Sierpinski.

• Dessin du tamis de Sierpinski

Considérons les trois transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$T_1(z) = \frac{1}{2}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \qquad T_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Soit E_0 le triangle de sommets d'affixes 0, 1 et $1/2 + i$.

1. Dessiner E_0.
2. Dessiner $E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup T_3(E_0)$
3. Dessiner $E_2 = T_1(E_1) \cup T_2(E_1) \cup T_3(E_1)$

   $\vdots$

Si nous voulons transmettre ces dessins informatiquement, il est impossible de donner les coordonnées des sommets de tous les triangles noircis du tamis puisqu'il y en a une infinité. En fait, il suffit de donner E_0, T_1, T_2 et T_3 et le tour est joué. C'est ce qui est utilisé sur internet.

Un autre problème : quelle est la resistance électrique du tapis?

• Dessin du tapis de Sierpinski

E_0 est le carré unité.

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \qquad T_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \qquad T_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$T_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \qquad T_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \qquad T_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i \qquad T_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i$$

Géométrie, complexes, fonctions, électronique : qui dit mieux?

• Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe $1/z$. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M′.

1. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.
2. Quelle est l'image de M′ par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.
3. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.
4. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

- **Un peu d'électronique : étude d'un filtre**

On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation ω, on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$\mathrm{T}(\omega) = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{Z}_1(\omega)}{\mathrm{Z}_2(\omega)}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Z}_1(omega) = \mathrm{R} + \frac{1}{j\mathrm{C}\omega} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_2(\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{R}} + j\mathrm{C}\omega}$$

Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $j^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i.

1. Montrez que $\mathrm{T}(\omega) = \dfrac{1}{3 + j\left(\mathrm{RC}\omega - \dfrac{1}{\mathrm{RC}\omega}\right)}$

2. a) On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$h(\omega) = \mathrm{RC}\omega - \frac{1}{\mathrm{RC}\omega}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0,+\infty[$ en précisant les limites.

b) On considère le point m d'affixe $3 + jh(\omega)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque ω parcourt $]0,+\infty[$?

c) Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $\mathrm{Z} = \mathrm{T}(\omega)$?

d) Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand ω parcourt $]0,+\infty[$.

e) Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm.
Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + j$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

2 - Des exercices de Bac

Exercice 1 Formes alg., trigo., ensembles de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ direct. Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{-i; i\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{C}_1$ par:

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

On appelle A et B les deux points du plan d'affixes respectives i et $-i$.

1. Soit z_1 et z_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   Calculer z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. On pose $z = x + iy$, $f(z) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ avec $x, y, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ des nombres réels.
   Calculer X et Y en fonction de x et y.
3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.
4. Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 2 équations 2nd degré - forme trigo.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 8z + 20 = 0.$$

   Les solutions seront notées z_1 et z_2, la partie imaginaire de z_1 étant positive.

2. Dans le plan complexe, placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $2i$.
Calculer le module et un argument du complexe :

$$Z = \frac{z_2 - z_1}{2i - z_1}.$$

En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

3. Soit D le point d'affixe $2(1-\sqrt{2})$.
Calculer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

Exercice 3 Forme trigo., ensembles de points

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application qui à chaque point M d'affixe z non nulle associe son image M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{z}.$$

On appelle (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Placer sur une figure (en prenant 4 cm pour unité graphique) le point B, d'affixe $w = \frac{1}{2}(1+i)$, et son image B' par f.
Donner le module et un argument de chacun des complexes w et w'.

2. Soit z un complexe non nul.
Comparer les modules et les arguments de z et z' .

3. Quel est l'ensemble des points M pour lesquels M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$?

4. Soit M un point de la droite D d'équation : $x = \frac{1}{2}$.
Montrer que son affixe z vérifie :

$$|1-z| = |z|$$

puis que :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1.$$

En déduire que M' est sur un cercle Γ que l'on déterminera. Placer D et Γ sur la figure.

Exercice 4 Équations - systèmes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $\dfrac{z+2}{z+2i} = i$

b) $2z + i\overline{z} = 5 - i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant: $\begin{cases} 2iz + z' & = 2i \\ 3z - iz' & = 1 \end{cases}$

Exercice 5 Équations coeff complexes

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

2. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(F) : z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$

3. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

4. Résoudre l'équation (F).

Exercice 6 Forme trigo.

On considère les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(i-1) \text{ et } Z_2 = -2-2i\sqrt{3}$$

(i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

1. Déterminer le module et un argument, exprimé en radians, de chacun des nombres Z_1 et Z_2.

2. Calculer, sous forme trigonométrique les complexes Z_1^3 et Z_2^2 .

3. En déduire le module et un argument (en radians) du nombre

$$U = \frac{Z_1^3}{Z_2^2}.$$

4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de l'entier relatif k le complexe Z_1^k est un réel.

Exercice 7 Forme alg. - ensembles de points

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z-1+2i}{z-i} \qquad (z \neq i).$$

1. Calculer Z pour, successivement : $z=1, z=1-i$.

2. On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ (x, y, X, Y sont des nombres réels).

a) Calculer X et Y en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit un réel.

c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.

d) Représenter les ensembles E et F dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 8 Forme trigo - ensembles de points

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-2$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-3+i\sqrt{3}$.

1. Calculer le module et un argument des complexes a, b et c.

2. Quelle est la nature du triangle ABC?

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|iz+2i| = \left|z+3-i\sqrt{3}\right|$

Exercice 9 Équation de degré 4

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

a) Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b) Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta).$$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 10 Équations du 2nd degré - forme trigo - ensemble de points

1. Dans le plan complexe ($\mathscr{P}$) rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, -2+3i et 1-i.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0 \qquad (1)$$
$$z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0 \qquad (2)$$

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b) Développer $(z-3)(z+2-3i)$, puis $(z-4i)(z-1+i)$.

c) En déduire les solutions de l'équation :

$$(z^2 - (1+3i)z - 9 + 9i)(z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i) = 0$$

.

d) Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.

e) Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixe z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$.

3. On appelle f l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M′, d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i$.

a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels f(M) appartient àl'axe des ordonnées.

Exercice 11 Équations du 2nd degré - ensembles de points - forme trigo.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 2i,\ z_B = 1 + \sqrt{3} + i,\ z_C = 1 + \sqrt{3} - i,\ z_D = 1 - 2i.$$

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Préciser la nature du quadrilarère ABCD.

c) Vérifier que : $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$.

d) Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

e) Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

3. Etant donné un nombre réel θ de l'intervalle $[0; 2\pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

a) Résoudre l'équation (3) dans $\mathbb{C}$.

b) Prouver que les points images des solutions appartiennent au cercle Γ.

Exercice 12 Forme alg. - ensemble de points

Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On note A le point d'affixe i.
À tout point M du plan distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{iz}{z-i}$.

1. a) Déterminer le point B' associé au point B d'affixe 1.
Déterminer le point C tel que son point associé C' ait pour affixe 2.

b) Déterminer les points M tels que l'on ait M'=M.

2. Etant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels.

a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble Γ des points M pour lesquels z' est un réel.

c) Placer les points A, B, B', C, C' et tracer Γ sur une figure. (unité graphique : 4 cm)

3. Soit z un complexe différent de i.

a) Prouver que : $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$

b) On suppose que M appartient au cercle γ de centre A et de rayon 1. Prouver que M' appartient aussi à γ.

Exercice 13 Équation du second degré - formes alg. et trigo.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z:

$$z = (1+i)\overline{z} + 3 - 2i \tag{4}$$

a) Calculer en fonction de x et de x les parties réelles et imaginaires de: $(1+i)\overline{z} + 3 - 2i$.

b) En remarquant que deux nombres complexes égaux ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, vérifier que la résolution de l'équation (4) conduit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues. En déduire la solution de (4).

2. a) Mettre le nombre complexe $(4-3i)^2$ sous forme algébrique.

b) En déduire une factorisation de $P(z) = z^2 - (7 - 24i)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$P(z) = 0 \tag{5}$$

3. On désigne par a la solution de (4) et par b et c celles de (4) (b est celle dont la partie réelle est positive).
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, placer les points A, B et C d'affixe respectives a, b et c.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 14 Forme trigo. - ensembles de points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -2, $2i$ et z, où z désigne un complexe différent de -2 et de $2i$.

On pose $\mathcal{Z} = \dfrac{z+2}{z-2i}$.

1. Exprimer géométriquement $|\mathcal{Z}|$ et $\arg \mathcal{Z}$.

2. Déterminer, algébriquement puis géométriquement, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que :

a) $\mathcal{Z}$ soit réel.
b) $\mathcal{Z}$ soit imaginaire pur.
c) $\mathcal{Z}$ soit élément de $\mathcal{G}_-^*$.
d) $\arg \mathcal{Z} = \dfrac{\pi}{2}$
e) $|\mathcal{Z}| = 1$

Exercice 15 Équations du 2nd degré - interprétation géo.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:
a) $(2-4i)z = 19-3i$.
b) $2z^2+2z+1=0$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\mathrm{A}=3$, $z_\mathrm{B}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{2}i$ et $z_\mathrm{C}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

a) Placer les points A, B et C.
b) Calculer $|z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}|$, $|z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}|$ et $|z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}|$.
c) Quelle est la nature du triangle ABC?
d) Déterminer l'affixe du point I milieu de [BC].
e) En déduire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Quelle est la nature de ce parallélogramme?

Exercice 16 Forme trigo. - ensembles de points

Le plan complexe Π est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.
On considère la fonction f de l'ensemble $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par:

$$f(z) = iz+2$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
A tout point M de coordonnées $(x; y)$ du plan Π, on associe son affixe $z = x+iy$.

1. a) Calculer $f(1)$.
b) Placer dans le plan Π les points A et A$'$ d'affixe respective 1 et $f(1)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.

3. Soit Ω le point de Π d'affixe $\omega = 1+i$.
a) Exprimer ω sous forme trigonométrique.
b) Placer le point Ω dans le plan Π.
c) Calculer ΩA et ΩA$'$.
d) Calculer $|f(1)-1|$ et en déduire que ΩAA$'$ est un triangle isocèle rectangle.

4. On pose $z = x+iy$ avec x et y réels.
a) Déterminer X et Y, respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.
b) Déterminer E_1 l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel. Représenter E_1.
c) Déterminer E_2 l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Représenter E_2.
d) Déterminer E_3 l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 2$. Représenter E_3.

Exercice 17 Forme trigo - ensembles de points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$$

1. Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

2. a) Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit

$$\left(z'-1\right)(z-1)$$

b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$\mathrm{AM}\times\mathrm{AM'}=2 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM'}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C′). En préciser le centre et le rayon. Construire (C) et (C′).

4. a) Déterminer l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AB}})$.

b) Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).
Placer son image P' sur la figure.

Exercice 18 Équation de degré 4 - Interprétation géo.

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z)=z^4+17z^2-28z+260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m=-2+4i$, $n=-2-4i$, $p=2+3i$ et $q=2-3i$.

4. a) Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m}=i$. Placer son image K.

b) En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. a) Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

c) Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 19 Style Bac avec ROC

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z|=\|\vec{w}\|$ et $\arg(z)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$, défini a $2k\pi$ près.

Dans cet exercice, *on prend comme prérequis* le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ; **démontrer que** $\arg\dfrac{z}{z'}=\arg(z)-\arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

On note A et B les points d'affixes respectives 2i et -1.

À tout nombre complexe z, distinct de 2i, on associe le nombre complexe $\mathrm{Z}=\dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$.

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z\neq-1$.

3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants

a) L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.

b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 20 Le QCM de la mort

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Vous avez 1 point par bonne réponse. J'enlève 0,5 point par réponse inexacte.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. La forme algébrique de z est

○ $\frac{8}{3} - 2i$ ○ $-\frac{8}{3} - 2i$ ○ $\frac{8}{3} + 2i$ ○ $-\frac{8}{3} + 2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1| = |z+i|$ est la droite d'équation :

○ $y = x - 1$ ○ $y = -x$ ○ $y = -x + 1$ ○ $y = x$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si

○ $n \equiv 1[3]$ ○ $n \equiv 2[3]$ ○ $n \equiv 0[3]$ ○ $n \equiv 0[6]$

4. Soit l'équation $z = \frac{6-z}{3-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Une de ses solutions est

○ $-2 - \sqrt{2}i$ ○ $2 + \sqrt{2}i$ ○ $1 - i$ ○ $-1 - i$

5. Soit A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'affixe z_C du point de C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/3$ est

○ $-i$ ○ $2i$ ○ $\sqrt{3} + i$ ○ $\sqrt{3} + 2i$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$ est

○ une droite ○ un cercle ○ une lemniscate de Bernoulli ○ une bergère syldave