COLLE MAPLE N°5
Chaos assisté par ordinateur

• Au commencement était le Schblurb

Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à ailette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves. Si l'on ne considérait que cette idéale situation, la population u de Schblurbs suivrait la loi suivante

$$u_{n+1} = \mathrm{R}u_n$$

Cette relation traduit le fait que la population de l'année $n+1$ est proportionnelle à l'année n : on applique à u_n le taux de natalité et le taux de mortalité. Le coefficient R résume ces proportions.

On prend $\mathrm{R} = 1,5$ et on suppose qu'il y avait un couple de Schblurbs au départ de notre étude.

1. On définit à l'aide de Maple la fonction $f : x \mapsto \mathrm{R}x$
   puis la suite u permettant de calculer le n-ième terme de la suite à partir du précédent
   On rentre la valeur initiale
   et la valeur du paramètre R
2. On demande les 15 premiers termes de la suite pour savoir ce qui se passe les 15 premières années
3. On trace les premières valeurs de la suite
4. Ce tracé laisse à penser que la population de Schblurbs va croître assez vite. Demandons à Maple une expression de u_n ne dépendant plus du terme précédent mais directement de n.
   Pour cela, on utilise la fonction `rsolve({équations de récurrences, conditions initiales},x(n));` [1]
5. Il ne reste plus qu'à demander sa limite quand n tend vers l'infini
   Ce résultat laisse perplexe sur la pertinence du modèle.

• Trop de Schblurbs nuit aux Schblurbs

Il est assez aisé d'objecter au modèle précédent que l'évolution ne peut par rester proportionnelle à la population de l'année précédente : au bout d'un moment la nourriture et l'espace vital, par exemple, viennent à manquer. On peut alors modéliser l'évolution de la population selon la loi

$$u_{n+1} = \mathrm{R}\, u_n(1 - u_n/100\,000)$$

1. Définissez $u(n)$ comme cela a été fait au paragraphe précédent et calculez les 25 premiers termes de la suite. On prendra en core $\mathrm{R} = 1,5$ et cette fois $u_0 = 20\,000$.
2. Pour représenter la suite, nous allons ajouter la première bissectrice et l'habituel escalier. Pour cela, nous aurons besoin de la fonction traçant les marches de l'escalier vue au TD précédent
   `marche :=k->([u(k),u(k)],[u(k),u(k+1)]) :`
3. Tracez également la graphique donnant la population en fonction de l'année. On utilisera l'option `style=point` et on observera le phénomène sur une cinquantaine d'années.
4. Observez maintenant ce qui se passe pour ces deux graphiques quand on fait varier le coefficient R. On regardera en particulier les graphiques correspondant à R=2 ; R=0,9 ; R=3,44 ; R=3,5 ; R=3, 544 ; R=3, 831874048.

[1] On utilise un $x(n)$ inconnu et non pas $u(n)$ qui a déjà été définie

5. Ce n'est pas tout ! Regardons maintenant ce qui se passe pour une même valeur de R lorsqu'on fait varier de manière infime $u(0)$. On prendra par exemple $\mathrm{R} = 3,831874048$ et $u(0)$ successivement égal à 20000 puis à 20001.

C'est l'illustration du fameux « effet papillon » : un battement d'aile de papillon à Rezé est susceptible de déclencher beaucoup plus tard une tornade au Texas. La très faible perturbation créée par le vol d'un papillon pourrait en principe faire varier les conditions initiales du système atmosphérique et engendrer plus tard un changement climatique en un endroit quelconque de notre planète.

6. Ce phénomène est mis plus clairement en évidence par un **diagramme de bifurcation**. Cette fois, le travail est inversé : je vous livre le programme et vous essayez de découvrir à quoi correspond le graphique obtenu.

```
L :=[] :
for r from 0 to 4 by 0.01 do
f :=x->r*x*(1-x/100000) :
u :=n->f(u(n-1)) :
u(0) :=20000 :
S :=NULL ;
for k from 100 to 120 do
P(k) :=[r,u(k)] :
S :=S,P(k) :
od ;
L :=[op(L),S] :
od :
plot(L,style=point) ;
```

Ensuite, observez ce qui se passe pour $0 \leqslant \mathrm{R} < 3$, $3 \leqslant \mathrm{R} < 3{,}45$, $3{,}45 \leqslant \mathrm{R} < 3{,}57$, $3{,}57 \leqslant \mathrm{R} \leqslant 4$.

• Attention au Zschbreuh !

Tout ceci est bien gentil, mais c'est sans compter sur le Zschbreuh, le sanguinaire prédateur du Schlurb. On remarque que la population v du Zschbreuh suit la loi

$$v_{n+1} = 0.25 v_n \left(1 - \frac{v_n}{25000} + \min\left(4, \frac{u_n}{1000}\right)\right)$$

tandis que la population u des Schblurbs suit maintenant la loi

$$u_{n+1} = \mathrm{R}\, u_n \left(1 - \frac{u_n}{100000} - \frac{v_n}{5000}\right)$$

Ici, les choses se compliquent un peu mathématiquement, donc je vous livre le programme pour que vous puissiez interpréter les résultats

```
R :=1.1 ;
u :=proc(n) option remember ;
max(0,R*u(n-1)*(1-u(n-1)/100000-v(n-1)/5000)) ;
end :
u(0) :=4200.0 ;
v :=proc(n) option remember ;
max(0,v(n-1)*(1-v(n-1)/2500+min(4,u(n-1)/1000))/4) ;
end :
v(0) :=1.0 ;
p :=plot([seq([i,u(i)],i=0..400)],color=blue) :
q :=plot([seq([i,v(i)],i=0..400)],color=red) :
plots[display({p,q}) ;
```

Faîtes varier R et commentez.