PREMIÈRE LEÇON

LES NOMBRES

After more than a decade of intense research, Derek unveils his calculation for the value of pi.

I - L'Égypte antique

a. Le système de numération de l'Égypte antique

Les Égyptiens avaient très peu de signes (hiéroglyphes) pour compter :

𓏺 : représente 1

𓎆 : représente 10

𓍢 : représente 100

𓆼 : représente 1000

𓂭 : représente 10000

𓆐 : représente 100000

𓁨 : représente 1000000

Leur système est dit « additif », comme les grecs et les romains : on « additionne les signes » pour obtenir le nombre désiré. Par exemple, que représente :

𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

Écrivez en égyptien : 2008, 37612, 354.

b. L'addition égyptienne

Calculez : 𓆐𓆐𓆐𓆐𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 + 𓁨𓁨𓁨𓆐𓆐𓂭𓂭𓆼𓆼𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
puis lisez-le en français.
Inventez d'autres additions et faites-les calculer à votre voisin.

c. La multiplication égyptienne

Ce système n'est pas très pratique pour multiplier les nombres. Les Égyptiens utilisaient une table contenant une série de nombres :

𓏺	𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺	𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

Comment est construite cette table ?

Par exemple, pour multiplier 235 par 53, ils écrivaient :

∩∩∩∩∩||| = ∩∩∩|| + ∩|||||| + |||| + | .

Ensuite ils dessinaient le tableau suivant :

✗	|	𓍢𓍢∩∩∩|||||
	||	𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩∩∩
✗	||||	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩
	||||||||	𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩∩∩∩
✗	∩||||||	𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩∩
✗	∩∩∩||	𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩

Il suffit alors d'additionner les cases marquées d'un ✗. Pouvez-vous dire pourquoi ? Posez d'autres multiplication à votre voisin.

Est-ce un moyen très efficace de multiplier ?

d. La division égyptienne

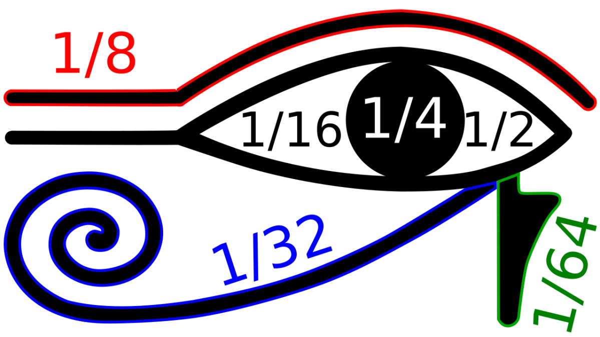
Observez la division posée de 65 par 5 :

	∩∩∩∩∩∩|||||	|||||
✗	|	|||||
	||	∩
✗	||||	∩∩
✗	||||||||	∩∩∩∩

Expliquez la méthode et proposez des divisions à votre voisin (pas trop compliquées...).

e. les fractions égyptiennes

D'après la religion égyptienne, le dieu Horus (à tête de Faucon) se battit contre son oncle Seth. Au cours du combat, Seth arracha un œil à Horus, le coupa en six et jeta les morceaux à travers l'Égypte. Le dieu Toth (à tête d'ibis) se chargea de récupérer les morceaux et de les rassembler pour former le schéma suivant :



Y a-t-il un problème ?
Les fractions avec dénominateur 64 étaient utilisées pour mesurer les volumes.
Les Égyptiens utilisaient d'autres fractions, mais toujours avec un numérateur égal à 1 en écrivant les dénominateurs sous une sorte d'œil.

Tout ça est un peu compliqué...

II - Numération athénienne

Plus tard, de l'autre côté de la Méditerranée, les Grecs avaient adopté un système du même type :
- 2 se note II
- 5 se note Π
- 9 se note ΠIIII
- 17 se note ΔΠII
- 43 se note ΔΔΔΔIII
- 438 se note HHHHΔΔΔΠIII
- 782 se note 𐅅HH𐅄ΔΔΔII
- 1997 se note X𐅅HHHH𐅄ΔΔΔΔΠII
- 6284 se note 𐅇XHH𐅄ΔΔΔIIII

Arrivez-vous à en percer le secret ? À quel autre système cela vous fait-il penser ?
Ménélas a gagné 286 mines au jeu de l'oie : écrivez ce nombre... à la manière de Ménélas.
Écrivez votre date de naissance en Athénien.

III - Babylone

a. La numération babylonienne

Tout à côté de l'Égypte, à la même époque, à Babylone, apparut un autre système de numération. La forme, d'abord, était différente car les Babyloniens utilisaient des tablettes et des poinçons au lieu de papyrus et de pinceaux. Il y avait principalement deux caractères : 𒁹 et 𒌋 .
Pour compter jusqu'à 59, le système fonctionne comme en Égypte et plus tard en Grèce et à Rome : on ajoute la valeurs des signes écrits. Ainsi 𒌋 𒈫 correspond à 12, 𒐏 𒐍 à 48.
Lisez les nombres suivants : 𒌍 𒐍 ; 𒐐 𒐈 ; 𒎙 𒐎 .
Proposez d'autres exemples à vos voisins.

À partir de 60, la numération ressemble plus à la nôtre car elle devient « positionnelle » : en effet, la valeur d'un signe dépend de sa position par rapport aux autres.
Ainsi, 63 s'écrit 𒁹 𒐈 , c'est-à-dire 1 fois 60 plus 3 fois 1.
De même, 𒐈 𒎙 𒐈 correspond à $3 \times 60 + 23 = 203$
Enfin 𒈫 𒌋 𒐎 𒌍 𒐊 correspond à 2 soixantaines de soixantaines + 19 soixantaines +35, c'est-à-dire ?

Proposez d'autres nombres à vos voisins.

.

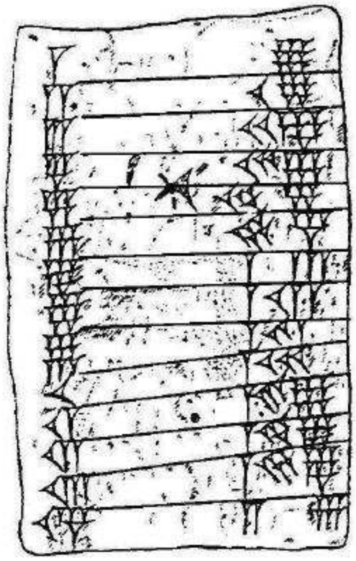
Que pensez-vous de cette opération : 𒌋 𒐊 + 𒐏 𒐊 = 𒁹 ?
Et de celle-ci : 𒈫 × 𒁹 𒌍 = 𒐈 ?
Est-ce que ça ne vous rappelle pas quelque chose ?

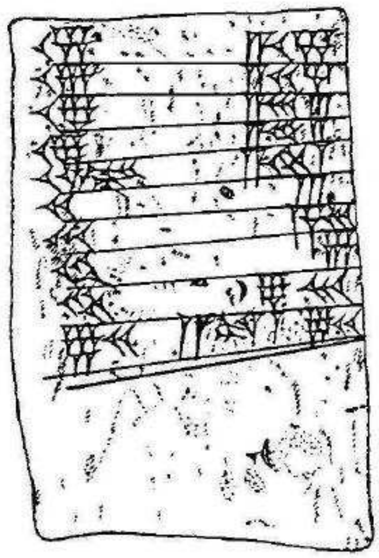
Les Babyloniens étaient confrontés à une petite ambiguité : le nombre 𒐈 𒎙 𒐈 qu'on peut noter [3;23] représentait à la fois
- $3 \times 60 + 23$;
- $3 \times 60^2 + 23 \times 60$;
- $3 + 23 \times \frac{1}{60}$;
- etc.

En fait, cela fait penser aux « multiplications à virgules » de l'école primaire où vous « décaliez » la virgule quitte à rajouter des zéros : pourquoi ?

b. Multiplication babylonienne

Les petits Babyloniens devaient apprendre beaucoup de tables de multiplications qui ressemblaient à ce « cahier » d'écolier : de quelle table s'agit-il ?

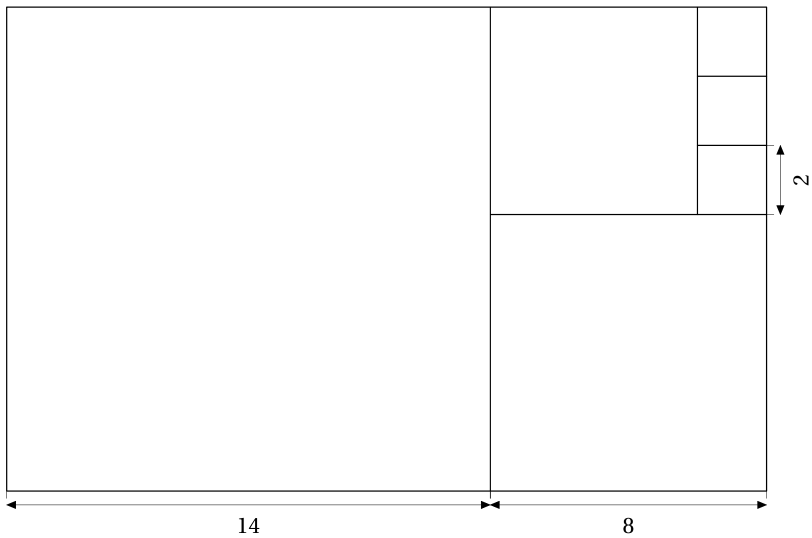




Ils disposaient également d'une table des carrés ; complétez la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	1	4	9																	

Pour multiplier 14 par 22, ils avaient ce petit dessin en tête :



et il ne restait plus qu'à additionner : $14 \times 22 = 14^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$
Multipliez de la même manière 17 par 31.

c. Division babylonienne

Pour effectuer des divisions, les Babyloniens utilisaient le fait que diviser par un nombre, c'est multiplier par... Ils disposaient d'une table d'inverses mais attention à la définition d'un inverse babylonien ! C'est 60 le nombre magique. L'inverse babylonien de 2 est donc 30 car $2 \times 30 = 60$ ou encore $\frac{60}{2} = 30$.
Pour trouver l'inverse de 8, on écrit :

$$\frac{60}{8} = \frac{56}{8} + \frac{4}{8} = 7 + \frac{1}{2} = [7;30] =$$

Complétez alors le tableau suivant :

2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	27	30	32	36
30	20	15	12	10	[7 ;30]	[6 ;40]	6	5	4	[3 ;45]							

IV - Les Mayas

a. Numération

Les Mayas ont vécu en Amérique centrale depuis la nuit des temps jusqu'à la conquête espagnole. Ils ont été parmi les premiers (si ce n'est les premiers) à utiliser un zéro à partir du IVesiècle après JC, 1100 ans avant les Européens! Leur système de numération était totalement « positionnel » est ressemble donc au nôtre mais leur nombre de « base » était vingt au lieu de dix pour nous (peut-être parce qu'ils n'avaient pas oublié leurs dix doigts de pied...).

Essayez de décrire leur système de numération sachant que : 6 s'écrit $\left|\ \cdot\mid\ \right|$, 13 s'écrit $\left|\ \vdots\mid\mid\ \right|$, 24 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\\ \text{⁞}\end{array}\right|$, 30 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\\ \mid\mid\end{array}\right|$, 65 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\vdots\\ \mid\end{array}\right|$, 232 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\mid\mid\\ :\mid\mid\end{array}\right|$, 400 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\\ \text{𝋠}\\ \text{𝋠}\end{array}\right|$, 512 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\\ \mid\\ :\mid\mid\end{array}\right|$, 8600 s'écrit $\left|\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \mid\mid\\ \text{𝋠}\end{array}\right|$.

Proposez des nombres à écrire à vos voisins.

b. Parlons yucatèque

Hun : $\cdot$	Ca : $:$	Ox : $\vdots$	Can : ⁞	Ho : $\mid$
Uac : $\cdot\mid$	Uuc : $:\mid$	Uaxac : $\vdots\mid$	Bolon : ⁞$\mid$	Lahun : $\mid\mid$
Buluc : $\cdot\mid\mid$	Lahca : $:\mid\mid$	Oxlahun : $\vdots\mid\mid$	Canlahun : ⁞$\mid\mid$	Holhun : $\mid\mid\mid$
Uaclahun : $\cdot\mid\mid\mid$	Uuclahun : $:\mid\mid\mid$	Uaxaclahun : $\vdots\mid\mid\mid$	Bolonlahun : ⁞$\mid\mid\mid$	Hunkal : $\begin{array}{c}\cdot\\ \text{𝋠}\end{array}$
Huntukal : $\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\end{array}$	Catukal : $\begin{array}{c}\cdot\\ :\end{array}$	Oxtukal : $\begin{array}{c}\cdot\\ \vdots\end{array}$	Cantukal : $\begin{array}{c}\cdot\\ \text{⁞}\end{array}$	Hotukal : $\begin{array}{c}\cdot\\ \mid\end{array}$
Cakal : $\begin{array}{c}:\\ \text{𝋠}\end{array}$	Huntuyoxkal : $\begin{array}{c}:\\ \cdot\end{array}$	Catuyoxkal : $\begin{array}{c}:\\ :\end{array}$	Oxtuyoxkal : $\begin{array}{c}:\\ \vdots\end{array}$	Cantuyoxkal : $\begin{array}{c}:\\ \text{⁞}\end{array}$

c. La « cinquième opération »

Regardons comment s'écrit 35 : *holhucakal*. On peutle décomposer en ho.lahun ti+u-ca-KAL ce qui se traduit mot à mot par : « 15 vers 2evingt ».

Ces formes font apparaître la spécificité des numérations mayas parlées précolombiennes, à savoir que les Mayas disposaient d'une opération que nous ne connaissons pas dans notre arithmétique. Une opération qui donne le résultat 35 quand on la fait porter sur les arguments 15 et 40 (ca-KAL est aussi le nom de quarante).

Appelons-la « mayation » : que donne la mayation de $\left|\ \mid\ \right|$ et $\left|\begin{array}{c}\vdots\\ \text{𝋠}\end{array}\right|$? de $\left|\ \cdot\mid\mid\mid\ \right|$ et $\left|\begin{array}{c}\cdot\mid\\ \text{𝋠}\end{array}\right|$? Proposez d'autres opérations à vos voisins.

V - La numération sino-japonaise

a. Un peu d'Histoire

La numération que nous allons découvrir est née en Chine... il y a très longtemps, sûrement à la même époque qu'en Égypte. Cependant, bien avant tous les autres, les Chinois ont adopté un système en base 10 tout à fait similaire à celui que nous utilisons actuellement. Ils ont ainsi découvert bien avant nous bon nombre de résultats grâce à leur numération « moderne ».

Les Grecs, quant à eux, ne disposant que d'un système fort peu pratique, se sont plutôt concentré sur la géométrie. Ce n'est qu'au XVeque les barrières religieuses et d'usage ont été levées en Europe pour enfin adopter une numération décimale entre temps modernisée par les Indiens puis les Arabes à la suite des Chinois.

Il existe deux grands système de numération en Chine. Nous étudierons le plus ancien afin de mieux comprendre notre propre système. Le deuxième est trop proche du nôtre (en utilisant des bâtons) pour nous permettre une approche différente.

b. Comptons

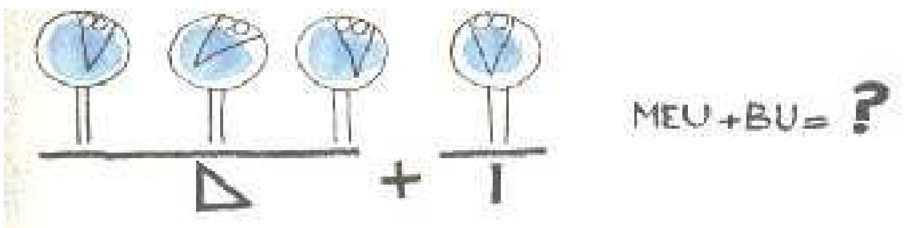
Essayez de deviner comment on écrit les nombres en Chine et au Japon à partir des éléments suivants :
- 7 s'écrit 七
- 20 s'écrit 二十
- 24 s'écrit 二十四
- 26 s'écrit 二十六
- 40 s'écrit 四十
- 75 s'écrit 七十五
- 11 s'écrit 十一
- 98 s'écrit 九十八
- 308 s'écrit 三百八au Japon et 三百〇八en Chine
- 3008 s'écrit 三千八au Japon et 三千〇八en Chine
- 30008 s'écrit 三万八au Japon et 三万〇八en Chine
- 0,3 s'écrit 三割
- 0,03 s'écrit 三分
- 0,003 s'écrit 三厘

Proposez des nombres à vos voisins.
Que pensez-vous de ce calcul :
八千二百五十+ 七千五十四= 一万五千三百四
et de celui-ci :
八* 一十二= 九十六
ou encore de celui-là :
一百二十八/ 四= 三十二

VI - La numération shadock

Le calcul a toujours donné beaucoup de fil à retordre aux Shadoks... En effet n'ayant que quatres cases il ne pouvait pas compter plus que quatre... 1, 2, 3, 4... Mais le professeur Shadoko avait réformé tout ca...
- Quand il n'y a pas de Shadoks, on dit GA ;
- Quand il y a un shadok de plus, on dit BU ;
- Quand il y a encore un shadok de plus, on dit ZO ;
- Et quand il y a encore un autre, on dit MEU.

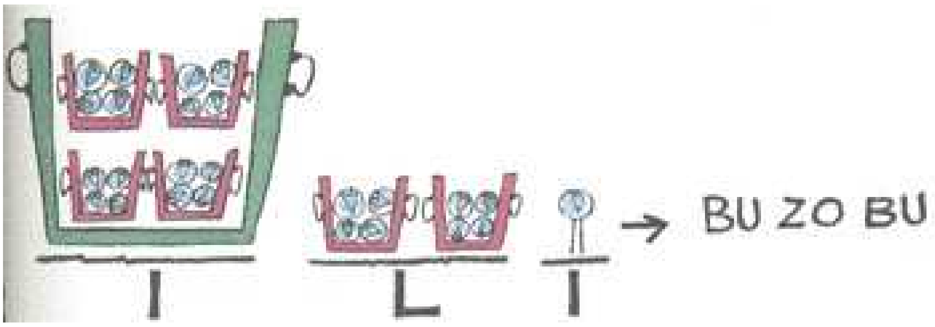
Si je mets un shadok en plus, évidement, je n'ai plus assez de mots pour les compter...



alors c'est très simple : on les jette dans une poubelle, et je dis que j'ai BU poubelle. Et pour ne pas confondre avec le BU du début, je dis qu'il n'y a pas de Shadok à coté de la poubelle et j'écris BU GA.

Bu Shadok à coté de la poubelle : BU BU.
Un autre : BU ZO.
Encore un autre : BU MEU.
...

MEU poubelles et MEU Shadoks à coté : MEU MEU. Arrivé là si je mets un Shadok en plus, il me faut une autre poubelle. Mais comme je n'ai plus de mots pour compter les poubelles, je m'en débarrasse en les jetant dans une grande poubelle. J'écris BU grande poubelle avec pas de petite poubelle et pas de Shadok à coté : BU GA GA.
Et on continue... BU GA BU, BU GA ZO....



MEU MEU ZO, MEU MEU MEU.
Quand on arrive là et qu'on a trop de grandes poubelles pour pouvoir les compter, eh bien, on les met dans une super poubelle, on écrit BU GA GA GA, et on continue...
Vous trouverez une machine à calculer shadock ici : http://www.lesshadoks.com/telechargement/Install.exe

VII - La numération... des ordinateurs

a. Comment compter avec des 0 et des 1 ?

Peut-être savez-vous que les ordinateurs parlent en « binaire », c'est-à-dire en base 2 : voyons ce que cela veut dire.
Par exemple, comptons de zéro à six en binaire :
0 - 1 - 10 - 11 - 100 - 101 - 110
Continuez à compter en binaire jusqu'à douze ?

b. Paquets

Groupez ces vélos par 2, puis les groupes de 2 par 2, etc.
🚲🚲🚲🚲🚲🚲🚲🚲🚲🚲🚲
Utilisez ce schéma pour compter les vélos en n'utilisant que le chiffre 2.

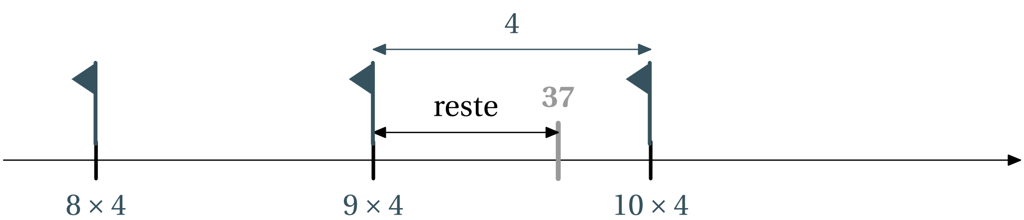
c. La table des Égyptiens

Souvenez-vous de la table des puissances de 2 qu'utilisaient les Égyptiens pour multiplier les entiers. Décomposer 11 en puissances de 2 à l'aide de cette table.
Des remarques ?

d. Une méthode plus générale

Si on dispose de la « table égyptienne », on peut donc s'arranger mais il existe un autre moyen si on n'en dispose pas ou si le nombre est trop grand pour notre table...

Vous savez encore ce qu'est une division euclidienne ? Par exemple que vous inspire ce dessin :



Comment traduire cette division à l'aide d'une somme et d'un produit ?
Comment s'appelle chaque membre de cette division ?

Observez maintenant cette séquence :

$$\begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

et retrouvez l'écriture binaire de 11...

Que pensez-vous de cette phrase :
« Le monde se sépare en 10 catégories : ceux qui comprennent cette phrase et les autres... »

VIII - La numération des Mickeys

Vous savez que Mickey n'a que quatre doigts à chaque main. Il ne dispose donc que de huit chiffres, de zéro jusqu'à sept...
Mickey aime jouer au football : combien a-t-il de ballons dans son garage ?
⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽

IX - Le code bibinaire

Boby LAPOINTE, célèbre chanteur français, était aussi mathématicien à ses heures. Ayant trouvé le code binaire trop compliqué à utiliser, il inventa le code... bibinaire (il y a un jeu de mot caché). Il suffit de remplacer les chiffres par des lettres. On commence par couper le nombre écrit en binaire en paquets de 2. S'il y a un nombre impair de chiffres, on rajoute un zéro à gauche, ce qui ne modifie pas la valeur de nombre (expliquez pourquoi). On commence par le premier groupe de deux chiffres le plus à droite. On remplace 00 par O, 01 par A, 10 par E, 11 par I.
Puis on prend le paquet de deux chiffres suivants en se déplaçant de droite à gauche. On remplace 00 par H, 01 par B, 10 par K, 11 par D.
Pour le paquet suivant, on recommence avec les voyelles. S'il y a encore un groupe, on remplace par une consonne, etc.

1. Écrivez les nombres de 0 à 31 en bibinaire.

2. Récitez la table de multiplication par HI en bibinaire.
3. Quelle est la base du bibinaire ?
4. Pour les curieux : écrivez 1177 en bibinaire.
5. Écrivez KEKIDIBIBI en numération décimale et également KEBOKADO.
6. Pour les très curieux : quel est le plus grand nombre qu'on peut écrire avec six lettres en bibinaire ?

X - Notion de base

a. On n'est pas des Mickey

Contrairement à cette charmante souris, nous avons dix doigts et pas huit. Nous comptons donc en **base dix** : qu'est-ce que ça veut dire ?
Pour vous aider à avoir des idées, pensez à ce qui se passe après 9, 99, 999, etc. et surtout, pensez **puissances de 10**.

b. Les bases à travers les âges

Il est temps de dresser un petit bilan de toutes ces activités : dans chacune des numérations étudiées précisez
– quelle est la base utilisé ?
– est-ce que la position des « chiffres » est importante ?
– quelle est l'opération qui permet d'obtenir la valeur du nombre à partir de son écriture ?
Effectuez maintenant la multiplication par 10 puis par 100 des nombres suivants dans chacune des numérations :
– 11
– le nombre de vos doigts de pieds et de main ;
– votre année de naissance ;
– le nombre d'habitants de Rezé.
Faites de même avec une multiplication par 2, puis avec une multiplication par 20 et enfin par 60.
Quels commentaires cela vous inspire-t-il ?

c. Les billets de banque

Regardez un billet de 20 euros. Il comporte un numéro... en face du Portugal.

Il y a en fait une lettre et onze chiffres. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet. Ici, U est la 21^e^lettre. Donc le numéro est en fait

2 119 586 900 453

Il faut savoir que les numéros des billets conçus par la Banque de France ont un reste dans la division par 9 toujours égal à 8. Vérifiez le sur ce billet. Connaissez-vous un moyen de le vérifier rapidement ? Sauriez-vous le prouver ?

Regardez cet autre billet :

Que vous inspire-t-il ?

XI - Les nombres non-entiers

1. Écrivez 308 ; 30,8 ; 3,08 ; 0,308 en japonais et de même avec 38 ; 3,8 ; 0,38 ; 0,038 ;
2. Lisez puis écrivez ces mêmes nombres avec « nos chiffres à nous » sans utiliser de virgule : comment faire ?
3. Effectuez les calculs suivants « en japonais » :
   - *3 virgule 15 plus 3 virgule 5*
   - *3 virgule zéro quatre plus 3 virgule zéro six*
4. Remplissez le tableau suivant :

Nombre	Chiffre des unités	Nombre d'unités	nombre entier d'unités	chiffres des centaines	Nombre de centaines	Nombre entier de centaines	chiffres des dixièmes	Nombre de dixièmes	Nombre entier de dixièmes
543,5									
908,72									
7665,093									
20,45									
40000									

5. Et celui-ci :

$5,42$	$5+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}$	$\frac{542}{100}$	$5+\frac{42}{100}$	cinq unités et quarante-deux centièmes
$4,518$				
	$16+\frac{7}{100}+\frac{3}{1000}$			
		$\frac{324}{100}$		
				douze millièmes

XII - Les mesures de masse anglo-saxonnes

L'unité de base anglaise pour mesurer les masses est la livre « *pound* » dont l'abréviation est en toute logique anglaise **lb**...
Une livre correspond *environ* à 453,49g. Pour des mesures plus fines, on utilise l'once « *ounce* » (**oz**) qui vaut $\frac{1}{16}$lb et le dram (**dr**) qui vaut $\frac{1}{16}$oz.
Pour des mesures plus importantes, on utilise les pierres « *stone* » (**st**) sachant que 1st= 14lb.
Combien pesez-vous ? Quelle est votre masse en pierre et livre ?

Vous pesez votre panier rempli de pommes et la balance indique $2\frac{3}{8}$ lb : qu'est-ce que ça signifie ? Quelle est la masse correspondant en grammes ?

Et si vous trouvez $3\frac{5}{16}$ oz de diamant dans votre jardin ?

XIII - Des nombres que la calculatrice n'aime pas...

Si vous tapez [1] [÷] [3] sur votre calculatrice, vous obtenez 0.333333333. Si j'utilise un ordinateur avec un logiciel de calcul adapté, j'obtiens :

```
 0.333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
```

Qu'est-ce que vous en pensez ?
Vous savez aussi que la longueur d'un cercle de diamètre 1cm vaut πcm. Certaines calculatrices ont une touche [π]. On obtient à l'écran 3.141592654. Avec un logiciel de calcul, on obtient

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089998
6280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385
2110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346
0348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892
5903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051
1854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522
4737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771
3427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219
6086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945
5346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
5982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092
1642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124
9721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060
4009277016711390098488240128583616035637076601047101819429555961989467678374494482553797747
2684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338
2430035587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030286182
9745557067498385054945885869269956909272107975093029553211653449872027559602364806654991198
8183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721
4772350141441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983
5694855620992192221842725502542568876717904946016534668049886272327917860857843838279679766
8145410095388378636095068006422512520511739298489608412848862694560424196528502221066118630
6744278622039194945047123713786960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478
0275900994657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363
9443745530506820349625245174939965143142980919065925093722169646151570985838741059788595977
2975498930161753928468138268683868942774155991855925245953959431049972524680845987273644695
8486538367362226260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894416948
6855584840635342207222582848864815845602850601684273945226746767889525213852254995466672782
3986456596116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893
1456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818
```

Qu'en pensez-vous ?

XIV - Famille de nombres

Essayez de classer les nombres que vous connaissez en début de 2nde ?

XV - À la découverte des nombres premiers

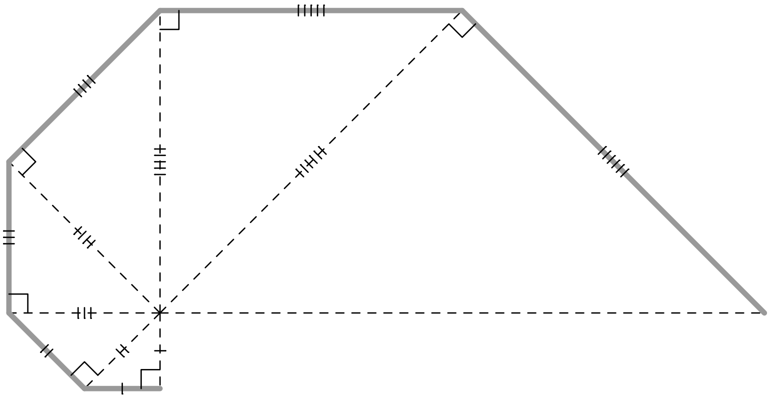
Dans un carré de côté 10, écrivez les nombres de 1 à 100, puis barrez 1, les multiples de 2, 3, 4, etc. : que reste-t-il ?
Il s'agit du crible d'Ératosthène...

XVI - Dessinons des racines

Il aurait été plus correct d'intituler cette activité : **construisons des irrationnels à la règle et à l'équerre**.
Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? Déduisez-en une *construction* de $\sqrt{2}$.
Construisez de même $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{11}$.

Casse-tête en forme d'escargot adepte du cubisme : quelle est la longueur du dixième segment gris de cette spirale[1] ?

[1] Je ne vous demande pas de prouver le résultat mais juste de le deviner



XVII - Développement décimal illimité

a. Curiosité

Observez ce qu'affiche une calculatrice quand vous effectuez les calculs suivants :

$$\frac{324-32}{9} \qquad \frac{3245-32}{99} \qquad \frac{324510-32}{9999}$$

Sans preuve, essayez d'écrire 57,33333333333333333333...sous forme de fraction.

b. Une histoire de ...

Par convention, les ...veulent dire qu'il y a une infinité de 3 à droite de la virgule. C'est un peu vague, nous en reparlerons plus bas.
À votre avis, que vaut 1,333...−1,333 ? 1,333− 1,333 ? $1,333\cdots-1,33$?
Tout ça reste un peu empirique.

c. L'algèbre au secours de la numération

Nous aimerions prouver ce que nous avons observé tout à l'heure. Essayons donc d'écrire 32,444...sous forme de fraction, puisque la machine nous dit que *ça a l'air* possible.
Comme c'est embêtant d'écrire 32,444..., nous allons lui donner un petit surnom, par exemple *Joe*.
Donc $Joe = 32,444\ldots$.
LA ruse : que vaut $10 \times Joe - Joe$? Déduisez-en que *Joe* est un nombre rationnel puis retrouvez les résultats précédents.

d. Développement décimal périodique

Posez la division de 1 par 3, vous obtenez sans cesse le reste 1 et le développement décimal est donc 0,33333333333...
En fait, il existe une écriture qui évite les ... : $0,\underline{3}$ signifie de la même manière que le 3 se répète infiniment.
Voyez ce que donne 13/7.

$$\begin{array}{l|l}
1\ 3 & 7 \\ \hline
\quad 6\ 0 & 1.8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\
\qquad 4\ 0 & \\
\qquad\quad 5\ 0 & \\
\qquad\qquad 1\ 0 & \\
\qquad\qquad\quad 3\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad 2\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}$$

Donc on écrit $13 \div 7 = 1.\underline{857142}\ldots$

e. Si, et seulement si

Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé, mais est-ce que **si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave ?
La première proposition[2] est une **implication** vraie : nager en maillot de bain dans un lac syldave implique d'être mouillé.
On utilise le symbole $\Longrightarrow$ pour matérialiser cette implication :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \Rightarrow \text{être mouillé}$$

La deuxième proposition[3] est l'**implication réciproque**. Dans le cas qui nous occupe, cette implication réciproque est fausse

$$\text{être mouillé} \nRightarrow \text{nager en maillot dans un lac syldave}$$

On dit que ces deux propositions ne sont pas **équivalentes** :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \nLeftrightarrow \text{être mouillé}$$

Que pensez-vous de l'affirmation : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle* ?

Et celle-ci : *Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, il a deux côtés opposés et de même longueur*

Revenons à nos nombres.
En pensant à la division posée, expliquer pourquoi un nombre rationnel admet forcément un développement décimal périodique.
Inversement, expliquez pourquoi un nombre admettant un développement rationnel périodique est forcément rationnel.
Comment exprimer ces résultats en termes d'équivalence ?

f. Les limites du développement décimal

Écrivez sous forme de fraction le nombre $1{,}\underline{9}$.
Des remarques ?

XVIII - $\sqrt{2}$ est irrationnel

a. Qui se cache derrière l'écriture $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2}$: qu'est-ce que ça veut dire ? Vous rappelez-vous de la définition vue en collège[4] ?
Pour les grecs, un nombre « existait »si l'on pouvait le dessiner. Ayant à votre disposition une règle de longueur 1 et une équerre, pouvez-vous dessiner $\sqrt{2}$?

b. Rationnel or not rationnel ?

Comme son nom l'indique, un irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel...
Il serait donc utile de se souvenir de ce qu'est un rationnel : rappelez la définition.
Ainsi, on ne sait pas vraiment ce qu'est un irrationnel, mais on sait ce qu'il n'est pas[5].
Une des premières questions qui surgit de votre esprit en ébullition est sûrement : est-ce que de tels nombres existent ?
Tapons SHIFT ($\sqrt{\ }$) 2 sur notre machine. Nous obtenons 1.414213562373. On pourrait penser qu'en découpant le segment $[1\,;2]$ en fractions suffisamment petites, on puisse « tomber »sur ce nombre, et donc l'exprimer en fractions d'unité. Que pourrait-on en déduire ?
Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Puisque je connais ma définition, je sais alors qu'il existe deux entiers - appelons-les p et q - tels que $\sqrt{2} = p/q$. Supposons que p et q sont choisis pour que la fraction soit la plus « simple »possible : comment comprenez-vous cette formulation ?

[2]**Si** je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé
[3]**Si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave
[4]Vous pouvez rechercher comment nos voisins européens appellent ce nombre et comment on a pu l'appeler depuis l'Antiquité
[5]C'est clair !

c. Où nous allons mettre au point un théorème sur la parité

Avant d'aller plus loin, faisons un petit aparté : comment traduire qu'un entier est pair ? Et tant qu'on y est qu'un entier est impair ? Essayer de donner une définition la plus générale possible mais qui permette de caluler[6].
À votre avis, p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?
Observez maintenant les liens entre la parité d'un nombre et celle de son carré sur quelques exemples. Cela vous donne des idées ? Essayez alors d'énoncer un théorème. . .puis de le prouver !

d. Revenons à nos moutons

Bon. On suppose donc que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme $p/_q$, avec p et q les plus simples possibles. Pouvez-vous en déduire des choses sur la parité de p^2 puis sur celle de p ?
Comment peut alors s'écrire p ? p^2 ? q^2 ? Qu'en déduisez-vous sur la parité de q ?
Méditez sur ce résultat.

e. Considérations sur le raisonnement que nous venons d'utiliser

Otto SCHZPRWT, chef des services secrets syldaves, interroge un homme que des agents des forces spéciales ont surpris en train de rôder autour d'une usine ultra-secrète d'aspirateurs. Pour prouver son innocence, il lui demande de réciter l'hymne à la gloire du Président syldave, mais le prévenu en est incapable. Otto SCHZPRWT en déduit donc qu'il n'est pas un patriote syldave, mais un vil espion à la solde de la Bordurie et le condamne à avaler en moins de 10 minutes une quenelle de grande taille de 18 kg.
Arrivé à ce moment du récit, vous vous demandez si votre pauvre prof de maths à abusé de la Slivoviz, célèbre eau de vie syldave.
Et bien non ! Car le bon Otto vient d'utiliser le même raisonnement qui nous a conduit à conclure que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel.
Reprenons les faits : notre hypothèse de départ était que $\sqrt{2}$ était rationnel. Après une série de déductions logiques, nous sommes arrivés à une conclusion *absurde*, à savoir que p et q devaient être tous deux pairs.
Par un raisonnement juste, nous sommes arrivés à un résultat faux : c'est donc que notre hypothèse de départ était fausse.
Nous avons effectué un **raisonnement par l'absurde**, qui, malgré son nom, est un type de raisonnement extrêmement rigoureux et que nous utiliserons souvent.
Son utilisation dépasse le cadre mathématique : il est utilisé par les chefs de services secrets mais aussi couramment par les garagistes, les plombiers, les médecins, les détectives privés, etc.[7]
Nous venons de nous initier à la Logique, qui est une discipline qui occupe les esprits depuis des siècles mais qui a connu un véritable essor surtout à partir du début du XX$^{\text{e}}$sous l'imulsion du britannique B. RUSSEL.

f. $\sqrt{2}$ admet-il un développement décimal périodique ?

Si vous répondez correctement à cette question, alors vous commencerez à vous débrouiller en logique :-)

XIX - Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre, c'est sa distance à zéro.
Par exemple, -3 et 3 sont à la même distance de zéro : $\text{abs}(-3) = \text{abs}(3) = 3$
Complétez la phrase suivante :

Si un nombre x est .... ALORS $\text{abs}(x) = \dots$ SINON $\text{abs}(x) = \dots$

XX - Le nombre d'or...

Épisode 1

Soit ABCD un carré de côté 1 .

1. Retrouver les étapes de la construction ci-dessous du rectangle ADFE , puis refaire la construction sur votre copie en choisissant pour unité 10 cm . (C et E sont sur un cercle de centre I , avec I milieu de [AB]) .

[6] if you see what I mean. . .
[7] Cherchez des situations correspondant à ces corps de métier. . .

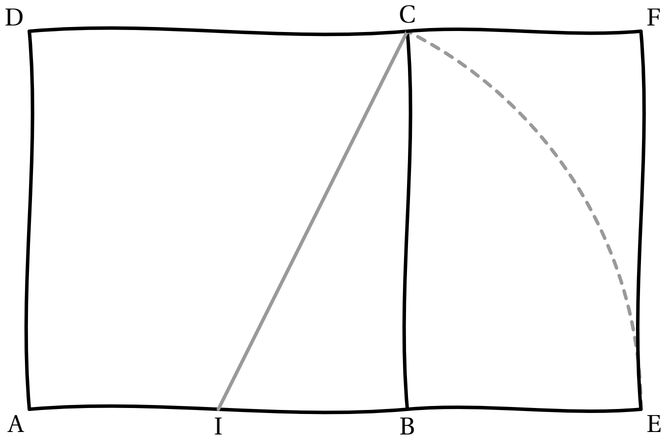


FIG. 1 – Rectangle d'or

2. En utilisant un théorème bien choisi, prouvez que $\text{AE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
3. Donnez une valeur approchée de $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ à l'aide de votre dessin. Quelle est à votre avis l'ordre de grandeur de la précision ?
4. À l'aide de la calculatrice, donnez une valeur arrondie à 10^{-5} près de $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ce nombre est noté Φ (lettre grecque appelée « phi ») et on l'appelle le nombre d'or . Le rectangle ADFE obtenu par la construction donnée est appelé un rectangle d'or .

Épisode 2

. Sans calculatrice

1. *Sans calculatrice* simplifiez l'écriture de Φ sans racine carrée au dénominateur. Puis simplifiez l'écriture de $1+\frac{1}{\Phi}$. Que remarquez-vous ?
2. *Sans calculatrice* simplifiez l'écriture de Φ^2 puis simplifiez l'écriture de $1+\Phi$. Que remarquez-vous ?

. Avec calculatrice

À l'aide de la calculatrice, donnez une approximation de

1. Φ
2. $a_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$
3. $a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$
4. $a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$
5. $a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$

En continuant le procédé, déterminez à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal d'étapes n pour que $\Phi - a_n \leqslant 10^{-9}$.

. Avec XCAS

Que veut dire *SQuare RooT* en anglais ?
Analysez le programme suivant :

```
  a(n):={
A:=1.0;
k:=1;
Phi:=approx(1+sqrt(5))/2)
tantque Phi-A>10^(-n) faire A:=sqrt(1+A);k:=k+1; ftantque;
return(k);
}
```

À l'aide de la calculatrice, donnez une approximation de

1. $b_1 = 1 + \frac{1}{1}$
2. $b_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$
3. $b_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$
4. $b_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$
5. $b_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$

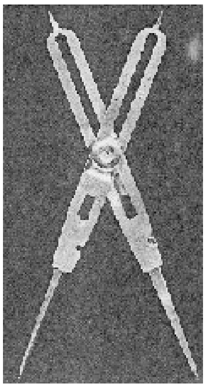
En continuant le procédé, déterminez à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal d'étapes n pour que $\Phi - a_n \leqslant 10^{-9}$.

. Avec XCAS

Complétez le programme suivant

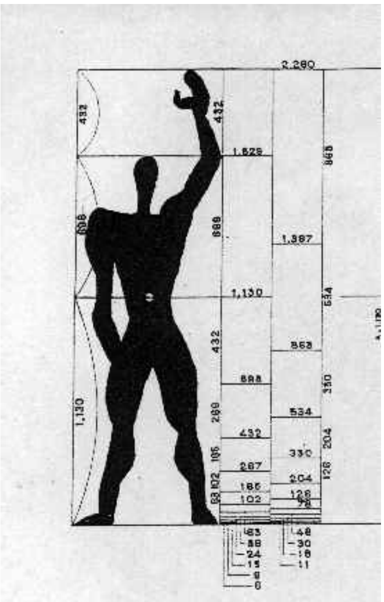
```
 b(n):={
B:=2.0;
k:=1;
Phi:=approx(1+sqrt(5))/2)
tantque abs(Phi-B)>10^(-n) faire B:=  ?????   ;k:=k+1; ftantque;
return(k);
}
```

Épisode 3 : le compas d'or



Voici un compas qu'utilisaient les architectes et les peintres pour garder des proportions dorées...
Comment pensez-vous que l'utilisaient ces artistes ?
Vous justifierez votre proposition en faisant une figure et en utilisant un théorème maintes fois utilisé au collège.
«S'il permet de vérifier rapidement les proportions d'un rectangle pour savoir s'il est un rectangle d'or , le compas de proportion peut aussi donner les puissances de Φ (il multiplie les longueurs par Φ !)» Expliquez comment on peut vérifier avec un compas de proportion que le rectangle de votre dessin de l'épisode 1 page 14 est un rectangle d'or, puis expliquez comment on obtient avec un compas d'or Φ^2, $1/\Phi$?.

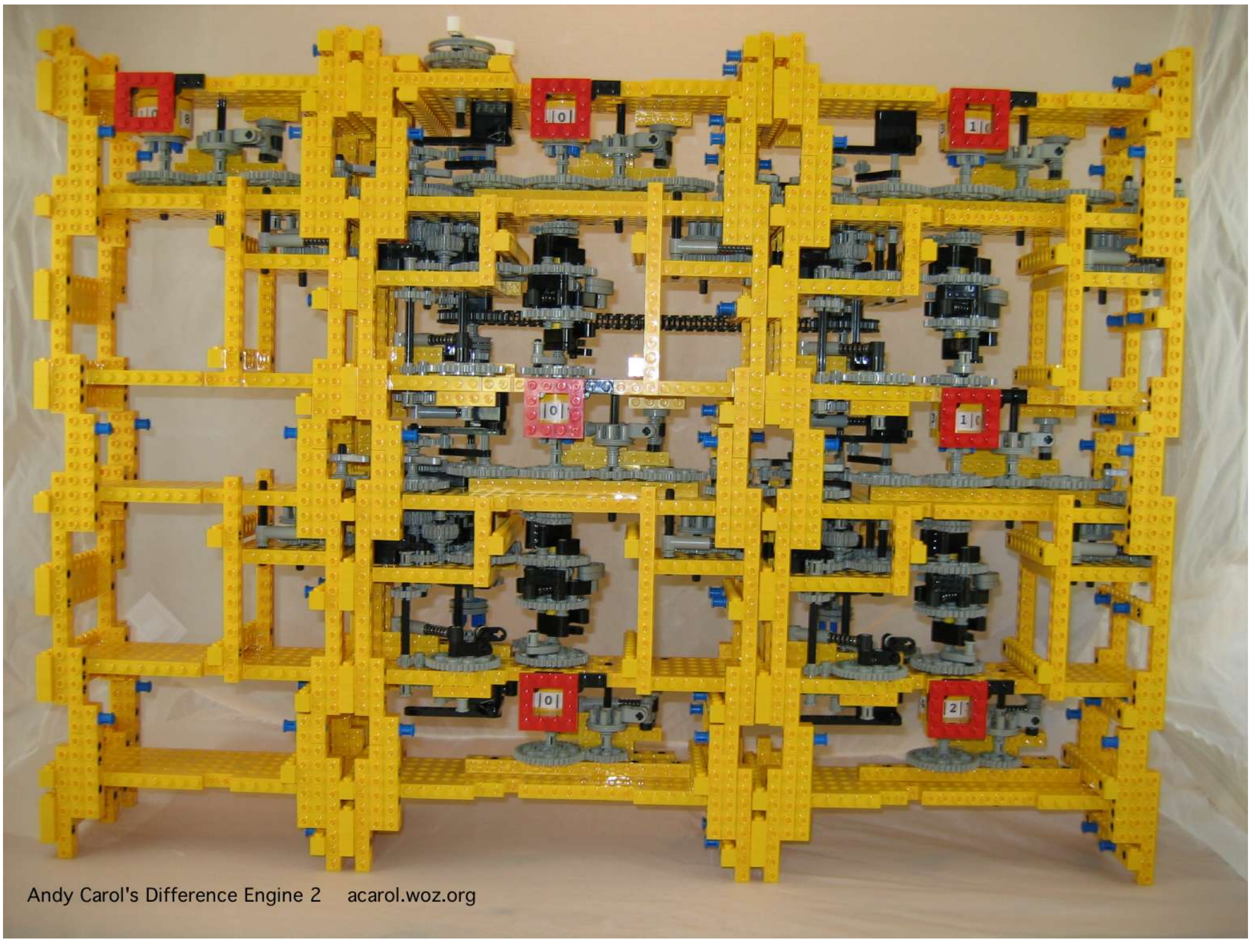
Épisode 4 : Rezé et le Nombre d'Or...



La Maison Radieuse (108m de long, 52m de haut et 19m de large) a été construite selon le principe du Modulor inventé par Le Corbusier.
Pour obtenir des appartements à taille humaine, l'architecte avait pris pour base un homme d'1m83 qui atteint 2m26 les bras levés : la hauteur des plafonds des appartements. Tel l'homme de Vitruve de Léonard de Vinci, des gravures au pied de l'immeuble rappellent ce principe.
Allez mener l'enquête au *Corbu* et prenez quelques photos pour démasquer le nombre d'or caché à Rezé...

XXI - Une machine à calculer en légos...

Voici une machine à calculer entièrement constituée de légos fabriquée par Andrew CAROL :



Par exemple, considérons l'expression :

$$P(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

Alors la machine peut calculer cette expression en remplaçant x par des nombres entiers.

a. Le principe

Remplissons le tableau suivant jusqu'à la 4^{e}ligne :

x	$P(x)$	première différence	deuxième différence
1	10	9	4
2	19	13	
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

sachant que 9 est obtenu en faisant $19-10$ et 7 en faisant $13-9$.
Qu'observez-vous dans la dernière colonne ?
Finissez alors de remplir le tableau en n'effectuant que des additions : c'est tout ce que peut faire la machine en légo grâce à ses roues dentées.

b. Un exemple

Soit $Q(x) = 4x^2 + 5 * x + 1$
Remplissez un tableau similaire au précédent en n'effectuant aucune multiplication...

c. Généralisation

Pourquoi ça marche ? Essayez de remplir un tableau avec $R(x) = ax^2 + bx + c$, a, b et c étant des nombres quelconques.

d. Un petit brin d'informatique

Si vous fréquentez l'atelier d'informatique du lycée, peut-être serez-vous capable bientôt décrire ce programme :

```
dif(P,N,C):={
p:=unapply(P,x);
n:=N+1;
D:=[[x,seq(j,j=1..C)],[f(x),seq(p(j),j=1..C)],seq([d[k],"X"$C],k=1..n-1)];
for(k:=2;k<=n;k++){
   for(j:=1;j<C-k+2;j++){
   D[k,j]:=simplifier(D[k-1,j+1]-D[k-1,j]);
   }
}
return(tran(D));
}:;
```

qui permet d'obtenir des tableaux rapidement. Par exemple, on tape

```
dif(x^3+3*x+2,3,10)
```

et on obtient

x	x^3+3x+2	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$
1	6	10	12	6
2	16	22	18	6
3	38	40	24	6
4	78	64	30	6
5	142	94	36	6
6	236	130	42	6
7	366	172	48	6
8	538	220	54	X
9	758	274	X	X
10	1032	X	X	X

Références

BECCARI, Claudio: The CB Greek fonts. ⟨URL: http://www.ctan.org/tex-archive/help/Catalogue/entries/cbgreek.html⟩

CAROL, A: Difference Engine., Building A Calculating Machine Using LEGO ⟨URL: http://acarol.woz.org/⟩

COUSQUER, É: Histoire du concept de nombre., L'Égypte antique ⟨URL: http://mediamaths.fr/pdf/egypte.pdf⟩

IREM, De Nantes: Enseigner les mathématiques autrement en sixième. IREM, 1997, 21–37

LESCANNE, P: Comment calculait-on il y a 4000 ans ? ⟨URL: http://perso.ens-lyon.fr/pierre.lescanne/PUBLICATIONS/histoire_algo_babylone.pdf⟩

OLIVE, Xavier: LaTeX en japonais. ⟨URL: http://www.xoolive.org/blog/2007/07/02/latex-en-japonais/⟩
PISKA, Karel: Fonts for Neo-Assyrian Cuneiform. ⟨URL: http://www-hep.fzu.cz/~piska/cuneiform.html⟩
SOUDER, Dominique: Sortons des sentiers battus. PLOT, Premier trimestre 2008, 10
Wikipedia: Numération., Numération antique ⟨URL: http://fr.wikipedia.org/wiki/Numeration⟩