UNIVERSITÉ DE NANTES

UNIVERSITÉ DE NANTES

PREMIER SEMESTRE, 2013-2014

IUT - Département d'informatique

DS - Mathématique discrète

Durée : quatre-vingts dix minutes / cent vingt en cas de tiers temps

CONSIGNES: *Vous justifierez vos réponses avec le plus grand soin. N'oubliez pas qu'il serait maladroit de copier sur votre voisin(e) qui a, de toute façon, écrit n'importe quoi. Toute enfreinte à cette règle entraîne l'obtention d'une note plutôt faible. Aucune calculatrice ni tout autre engin relié à un quelconque réseau et pouvant faire office de téléphone n'est autorisée. Une feuille de format A5 recto-verso manuscrite peut être consultée pendant le DS sous réserve d'acceptation du jury. Vous ne rendrez que les feuilles de réponses (numérotées de 3 à 8): les pages 3 et 4 d'une part et les pages 5 à 8 d'autre part, en écrivant à chaque fois votre nom.*

Exercice 1.

L'opérateur $\downarrow$ est défini par $1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0$ et $0 \downarrow 0 = 1$.

a. Exprimer $a \downarrow b$ en n'utilisant que a, b, $\neg$ et $\wedge$ (sans parenthèses).

b. Exprimer $\neg p$ en n'utilisant que p et $\downarrow$.

c. Soit $f \equiv \neg(x \to \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z)$. Exprimer f en n'utilisant que x, y, z, $\downarrow$, (et).

Exercice 2.

2040, le monde mathématique est en émoi : Eudes Chaprot, un ancien étudiant du département de Gae de l'Itu de Klow en Syldavie, prétend avoir démontré un théorème révolutionnaire. Voici ce qu'il a publié dans *Barbue magazine* :

Énoncé :*Toute relation sur un ensemble qui est symétrique et transitive est réflexive.*

Démonstration : *Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble A et soit a un élément de A. Considérons un élément b de A tel que (a, b) soit dans le graphe de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, alors (b, a) est aussi dans le graphe de $\mathcal{R}$. Or la relation est transitive donc $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \to a\mathcal{R}a$ et on en déduit que $\mathcal{R}$ est réflexive.*

Y a-t-il un bug dans la démonstration ? Si oui, trouvez-le..

Exercice 3.

a. Soit $E = \{0, 1\}$. Déterminer $\left(E^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}\right) \otimes E$ (Rappel : $\otimes$ désigne l'opérateur du produit cartésien).

b. Soit $A = \{3, 7\}$ et $B = \{c, g\}$. Déterminer

i. A^2, **ii.** B^2, **iii.** $A \otimes B$, **iv.** $B \otimes A$, **v.** $B^2 \otimes A$.

Exercice 4.
On considère la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si, $x-y$ est un multiple de 3.

a. Démontrez que deux entiers sont en relation par $\mathcal{R}$ si, et seulement si, leurs restes dans la division par 3 vérifie une certaine propriété.

b. Déterminez, en tentant d'être aussi rigoureux que possible, l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ modulo $\mathcal{R}$, noté Q.

c. Dans le langage **Gloup**, on dispose d'un type **Ens a** pour désigner les ensembles dont les éléments sont de type a.
Le type **Entier** désigne les entiers signés en précision infinie. Quel sera, dans ce langage, la signature

i. de $\mathbb{Z}$? **ii.** de $[2]_\mathcal{R}$? **iii.** de Q ?

d. Complétez avec le symbole le plus signifiant parmi $\in, \ni, \subseteq, \supseteq, =, \neq, \subsetneq, \supsetneq, \not\subseteq, \not\supseteq$

i. $2 \ldots [2]_\mathcal{R}$;
ii. $\mathbb{Z} \ldots [2]_\mathcal{R}$;
iii. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \ldots [2]_\mathcal{R}$
iv. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \ldots \mathbb{Z}$
v. $Q \ldots \mathbb{Z}$
vi. $Q \ldots \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
vii. $Q \ldots [2]_\mathcal{R}$

Exercice 5.
On note : $a = \{1\}$, $b = \{2\}$, $c = \{3\}$, $d = \{1,2,3,5,8,9\}$, $e = \{1,2,6\}$, $f = \{1,2,3,5,6,8,9\}$, $g = \{3,9\}$, $h = \{1,2\}$, $i = \{1,2,3,4,5,8,9\}$, $j = \{1,2,5\}$, $k = \{2,5\}$, $\ell = \{3,8,9\}$ et $m = \{1,2,5,6\}$.

On note enfin $\Omega = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m\}$.

a. Est-ce que Ω est un ensemble totalement ordonné par $\subseteq$?

b. Déterminez, lorsque cela est possible :

i. les éléments minimaux de Ω ;
ii. les éléments maximaux de Ω ;
iii. le maximum de Ω ;
iv. le minimum de Ω ;
v. les majorants de $\{a,b,c\}$ dans Ω ;
vi. les majorants de $\{g,\ell,j\}$ dans Ω ;
vii. les minorants de $\{g,\ell,j\}$ dans Ω ;
viii. la borne inférieure de $\{g,\ell,j\}$ dans Ω ;
ix. la borne supérieure de $\{a,b,c\}$ dans Ω.

c. Déterminez le diagramme de Hasse de la relation $\subseteq$ sur Ω.

d. On considère la procédure suivante :

```
Procédure Exo6( E : Ensemble muni d'un ordre partiel )
S ← E
TantQue S ≠ ∅ Faire
    m ← un élément minimal de S choisi selon un critère fixé
    S ← S \ {m}
    afficher m
FinTantQue
```

Le critère fixé de choix de l'élément minimal lorsqu'il y en a plusieurs sera l'ordre alphabétique croissant.
Appliquez alors cette procédure à l'ensemble Ω précédent muni de l'ordre $\subseteq$: qu'affiche-t-il ?
À votre avis, quel est le rôle de cette procédure ?

Prénom: ______________________ NOM: ______________________ Groupe: ______

Exercice 1.

a.

b.

c.

Exercice 2.

Exercice 3.

a.

b. **i.**

ii.

iii.

iv.

v.

Prénom: ______________ NOM: ______________ Groupe: ______

Exercice 4.

a.

b.

c. **i.**

ii.

iii.

d. **i.**

ii.

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

Exercice 5.

a.

b. i.

ii.

iii.

iv.

v.

vi.

vii.

viii.

ix.

c.

d.