CORRECTION du devoir surveillé n°2 — Samedi 8 novembre 2008

$2^{nde}12$ — 2 heures

Exercice 1

Tous ont été corrigés en classe sauf le dernier :

$$\begin{aligned}
x &< y && \text{On élève au carré des nombres positifs}\\
x^2 &< y^2 && \times 4 > 0\\
4x^2 &< 4y^2 && \text{On passe à l'inverse des nombres positifs}\\
\frac{1}{4x^2} &> \frac{1}{4y^2} && \times 7 > 0\\
\frac{7}{4x^2} &> \frac{7}{4y^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{7}{4x^2} > \frac{7}{4y^2}$$

Or

$$1 > -5$$

En additionnant membre à membre ces inégalités on obtient que

$$\frac{7}{4x^2} + 1 > \frac{7}{4y^2} - 5$$

Exercice 2

```
A(x):=(x-2)*(2x+3)-(4x^2-9):;
```

```
B(x):=(x+1/4)^2-25/16:;
```

1. Développer et réduire A(x) et B(x) :

```
developper(A(x))
```

$$-2x^2 - x + 3$$

```
normal(developper(B(x)))
```

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

2. Factoriser A(x) et B(x).

Comme $(4x^2-9) = (2x+3)(2x-3)$, on s'aperçoit que l'on peut factoriser par $2x+3$:

```
factoriser(A(x))
```

$$-(x-1)(2x+3)$$

On ne présente plus l'égalité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

```
factoriser(B(x))
```

$$\frac{(x-1)(2x+3)}{2}$$

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation B(x) = 0.

```
resoudre(B(x)=0,x)
```

$$S = \left\{1, -\frac{3}{2}\right\}$$

4. Étudiez le signe de $(2x+3)(-x+1)$.

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $(2x+3)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 3

1. Calculer t, u et v et donner les résultats sous la forme la plus simple possible.

```
simplifier((sqrt(2)-sqrt(7))*(sqrt(2)+sqrt(7)))
```

$$-5$$

```
simplifier(1/2+7/5*3/4)
```

$$\frac{31}{20}$$

```
simplifier((2/3+1)/2-1/6)
```

$$\frac{2}{3}$$

2. On remarque que $u = \frac{31}{20} = \frac{155}{100}$

Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
t		$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
u			$\in$	$\in$	$\in$
v				$\in$	$\in$

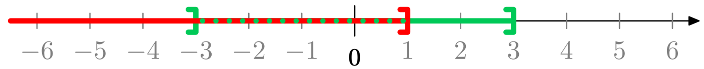
Exercice 4

1. On donne les intervalles $\mathrm{I} =]-3;3]$ et $\mathrm{J} =]-\infty;1]$

a) Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $-\pi \approx -3,1 \notin \mathrm{I}$ $\sqrt{2}-1 \approx 0,4 \in \mathrm{J}$

b) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :

$\mathrm{J} =]-\infty;1]$ $\mathrm{I} =]-3;3]$

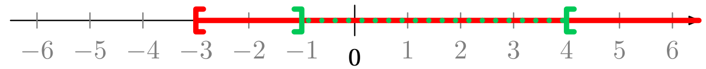


c) Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} =]-3;1]$ $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} =]-\infty;3]$

2. On donne les intervalles $\mathrm{I} =]-1;4[$ et $\mathrm{J} = [-3;+\infty[$

a) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :

$\mathrm{I} =]-1;4[$ $\mathrm{J} = [-3;+\infty[$



b) Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \mathrm{I}$ $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \mathrm{J}$

Exercice 5

Voici le tableau de signe d'une certaine expression :

x	-1		1		2		3		4
Signe de F(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Quel est le signe de $\mathrm{F}(x)$ quand $x = \frac{5}{2}$?

$$\frac{5}{2} \in [2;3] \Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{5}{2}\right) < 0$$

Quand $x = \pi$?

$$\pi \in [3;4] \Longrightarrow \mathrm{F}(\pi) > 0$$

2. Résolvez sur $[-1;4]$ l'inéquation $\mathrm{F}(x) \leqslant 0$;

$$\mathrm{S} = \{[1;2] \cup [3;4]\}$$

3.
- $f_1(x) = -x^2 + 3x - 2$: $f_1(3) = -2 \neq 0$ donc f_1 ne convient pas ;
- $f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$: peut convenir ;

– $f_3(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$: $f_3(0) = 6 > 0$ donc f_3 ne convient pas ;
– $f_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$: $f_4(0) = 30 > 0$ donc f_4 ne convient pas ;

Exercice 6

1. $\dfrac{2x+7}{(-3x+1)(x^2+\pi)}$;

x	$-\infty$		$\frac{-7}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $\dfrac{(2x+7)}{(-(3x)+1)(x^2+\pi)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

2. $\dfrac{(x+9)(x^2-4)}{-5x}$.

x	$-\infty$		-9		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $\dfrac{(x+9)(x^2-4)}{-5x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Exercice 7

1. $-2 < x < 4 \iff x \in]-2\,;4[$;

2. $x \geqslant -2,5 \iff x \in [-2,5\,;+\infty[$;

3. $0 \leqslant x < 3,8 \iff x \in [0\,;3,8[$;

4. $-3 \leqslant x \leqslant -0,5 \iff x \in [-3\,;-0,5]$;

5. $x > 0 \iff x \in]0\,;+\infty[$;

6. $x \geqslant -3 \iff x \in [-3\,;+\infty[$.

Exercice 8

$$-1 \leqslant \frac{4x-3}{5} \leqslant 2 \qquad \times 5 > 0$$
$$-5 \leqslant 4x-3 \leqslant 10 \qquad +3$$
$$-2 \leqslant 4x \leqslant 13 \qquad \div 4 > 0$$
$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{13}{4}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l' inéquation :

$$S_{\mathbb{Z}} = \{0\,;1\,;2\,;3\}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' inéquation :

$$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{13}{4}\right]$$

Exercice 9

Quel était l'animal préféré de Louis II de Bavière ?