Corrigé du DM1

Mathématiques

T$^{\text{ale}}$S3 / 2018-2019

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

1. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{5}{100}=1,05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0=12$ et de raison $q=1,05$.
   Donc, pour tout n, on a : $v_n=v_0\times q^n=12\times 1,05^n$.
2. Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit chercher n tel que $v_n>60$; ne disposant par du logarithme népérien, on ne peut résoudre l'inéquation. On va donc utiliserla machine sachant que (v_n) est strictement croissante puisque sa raison est strictement supérieure à 1 :
   On obtient $v_{32}\approx 57,18$ et $v_{33}\approx 60,03$ donc pour $n=33$ c'est-à-dire en 2049, la population dépassera 60 000 individus.
   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=-\dfrac{1,1}{605}u_n^2+1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{1,1}{605}x^2+1,1x$.
   (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\dfrac{1,1}{605}\times 2x+1,1=-\dfrac{2,2}{605}x+1,1$.
   $g'(x)>0 \iff -\dfrac{2,2}{605}x+1,1>0 \iff 1,1>\dfrac{2,2}{605}x \iff \dfrac{1,1\times 605}{2,2}>x \iff x<302,5$
   Donc $g'(x)>0$ sur $[0\ ;\ 60]$ donc g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$.
   (b) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=x$:
   $$g(x)=x \iff -\frac{1,1}{605}x^2+1,1x=x \iff -\frac{1,1}{605}x^2+0,1x=0 \iff x\left(-\frac{1,1}{605}x+0,1\right)=0$$
   $$\iff x=0 \text{ ou } -\frac{1,1}{605}x+0,1=0 \iff x=0 \text{ ou } 0,1=\frac{1,1}{605}x \iff x=0 \text{ ou } 0,1\times\frac{605}{1,1}=x$$
   $$\iff x=0 \text{ ou } x=55$$
2. On remarquera que $u_{n+1}=g(u_n)$.
   (a) $u_1=g(u_0)=g(12)\approx 12,938$
   Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017. Cela correspond à une augmentation d'environ 8% en un an.

(b) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right)$

$$= u_n \times \frac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times \frac{605}{1,1}\right) = \frac{1,1}{605}u_n\,(55 - u_n)$$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n\,(55 - u_n) \geqslant 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(d) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.

L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

On complète l'algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$:

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	u prend la valeur $1,1u - \frac{1,1}{605}u^2$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher n

Au départ u prend la valeur 12 i.e. u prend la valeur u_0.

Ensuite, à chaque tour de boucle, on réaffecte la variable u :

$$\text{Nouveau } u = g(u \text{ précédent})$$

et on incrémente n d'une unité.

Donc au n-ème tour de boucle u reçoit la valeur de u_n.

La boucle s'arrête dès que u_n dépasse 50 et on affiche la dernière valeur de n calculée.