Lycée Notre-Dame de Rezé

TERMINALE S3 15 Octobre 2018

Devoir Surveillé - Mathématiques

Durée : cent dix-huit minutes

Exercice 1.
Prérequis : on suppose connue la définition d'une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer le théorème suivant :

Soit u *et* v *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*
— $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
— *Il existe un entier* N_0 *tel que pour tout entier* $n \geqslant N_0$ *on a* $v_n \geqslant u_n$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice 2.
Étudier la limite des suites de terme général $u_n = 4 + \dfrac{3\sin(n)}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 2}$

Exercice 3.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. On écrira z sous forme algébrique.

a. $(2+4i)z + 5 = (5+i)z + 3i$

b. $\dfrac{2}{\overline{z}} = \dfrac{1}{2-i} + \dfrac{1}{1+2i}$

Exercice 4.
On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2}$.

a. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. **i.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

ii. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 5.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé . À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -z^2 + 2z$

Le point M' est appelé image du point M.

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $-z^2 + 2z - 2 = 0$.
En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

b. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'. On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

Exercice 6.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3e^{-x}$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Déterminez le sens de variation de la fonction g.

b. Déterminez une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 1.

Exercice 7.
Le 1er septembre 2018, le lycée Cantor compte 2971 élèves (qui est bien sûr un nombre premier). Une étude statistique menée par les élèves de l'école primaire voisine a montré que chaque 1er septembre :

— 10% de l'effectif quitte l'établissement à cause des maths ;
— 250 nouveaux élèves s'inscrivent à cause des maths.

La direction veut savoir si elle doit se débarrasser des profs de maths. Pour cela elle cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2018 + n$.

a. Justifiez clairement que l'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 2971$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = u_n - 2500$.

  i. Démontrez élégamment que la suite (w_n) est géométrique.

  ii. Exprimez alors w_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

c. Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -47,1 \times 0,9^n$. Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

d. La suite (u_n) est-elle convergente ?

e. La capacité optimale d'accueil pour que chacun puisse s'asseoir dans les salles est de 2801 élèves. Ainsi en 2018, lelycée était en sureffectif. Déterminez à l'aide de votre calculatrice à partir de quelle année, le contexte restant le même, le lycée ne sera plus en sureffectif.

f. On souhaite écrire un algorithme qui détermine ce dernier résultat. Voici trois algorithmes proposés par des élèves. Parmi eux, y en a-t-il un qui convienne pour répondre au problème posé ? Justifiez votre choix et expliquez pourquoi vous écartez certains algorithmes.

```
Algorithme 1
Variable
    x : entier
    y : flottant
Début
    x ← 0
    y ← 2971
    TantQue x > 2971 Faire
        x ← 0.9 × x + 250
        y ← y + 1
    FinTantQue
    Afficher(2018 + x)
Fin
```

```
Algorithme 2
Variable
    x : entier
    y : flottant
Début
    x ← 0
    y ← 2971
    TantQue x > 2971 Faire
        x ← 0.9 × x + 250
        y ← y + 1
    FinTantQue
    Afficher(2018 + y)
Fin
```

```
Algorithme 3
Variable
    x : entier
    y : flottant
Début
    x ← 0
    y ← 2971
    TantQue x > 2971 Faire
        x ← −50 × 0,9^x
        y ← y + 1
    FinTantQue
    Afficher(2018 + y)
Fin
```

```
Algorithme 4
Variable
    x : entier
    y : flottant
Début
    x ← 0
    y ← 2971
    TantQue x > 2971 Faire
        x ← −50 × 0,9^x
    FinTantQue
    y ← y + 1
    Afficher(2018 + y)
Fin
```