# Suites de matrices

**Terminale S (enseignement de spécialité)**
**Lycée Charles PONCET**

Mai 2013

## Table des matières



Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

# 1 Suites de matrices colonnes telles que $U_{n+1} = AU_n + B$

## 1.1 Suites de matrices

**Définition 1.1.1**
$p$ *et* $q$ *sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à* 1.
*Une* suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans l'ensemble* $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *des matrices à* $p$ *lignes et* $q$ *colonnes définies sur* $\mathbb{R}$.

☛ Tous les éléments des matrices d'une suite de matrices sont des suites numériques.

✏ Donner un exemple d'une suite de matrices colonnes à 3 lignes.

**Définition 1.1.2**
*Une suite de matrices* converge *si tous les éléments des matrices sont des suites convergentes.*
*La limite de la suite de matrices est alors la matrice dont les éléments sont les limites des suites numériques.*

✏ Démontrer que la suite $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2n}{n+1} \\ e^{-n} \end{pmatrix}$ converge et déterminer sa limite.

## 1.2 Suites de matrices colonnes telles que $U_{n+1} = AU_n + B$

**Proposition 1.2.1**
$p$ *est un entier naturel supérieur ou égal à 2.*
*Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrices colonnes à* $p$ *lignes telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ *où* $A$ *est une matrice carrée non nulle d'ordre* $p$.
*Alors, pour tout entier naturel* $n$, $U_n = A^n U_0$.

✏ Démontrer la proposition 1.2.1 par récurrence sur $n$.

**Proposition 1.2.2**
$p$ *est un entier naturel supérieur ou égal à 2.*
*Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrices colonnes à* $p$ *lignes telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$ *où* $A$ *est une matrice carrée non nulle d'ordre* $p$ *et* $B$ *une matrice colonne à* $p$ *lignes.*
*S'il existe une matrice colonne* $C$ *à* $p$ *lignes telle que* $C = AC + B$ *alors, pour tout entier naturel* $n$, $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

✏ Démontrer la proposition 1.2.2 en introduisant la suite $(V_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $V_n = U_n - C$ et en utilisant la proposition 1.2.1.

## 1.3 Convergence des suites de matrices colonnes telles que $U_{n+1} = AU_n + B$

**Proposition 1.3.1**
$p$ *est un entier naturel supérieur ou égal à 2.*
*Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrices colonnes à* $p$ *lignes telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$ *où* $A$ *est une matrice carrée non nulle d'ordre* $p$ *et* $B$ *une matrice colonne à* $p$ *lignes.*
*On suppose qu'il existe une matrice colonne* $C$ *à* $p$ *lignes telle que* $C = AC + B$.

- *Si* $U_0 = C$ *alors la suite* $(U_n)$ *converge vers* $C$.
- *Si* $U_0 \neq C$ *et* $(A^n)$ *converge alors la suite* $(U_n)$ *converge*

✏ Démontrer la proposition 1.3.1.

**Remarque**

On a des propriétés analogues pour les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices lignes à $q$ colonnes telles que $U_{n+1} = U_nA + B$ où $A$ est une matrice carrée non nulle d'ordre $q$ et $B$ une matrice ligne à $q$ colonnes.

# 2 Étude des marches aléatoires

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1**

*On considère une expérience aléatoire ayant $N$ issues possibles : $S_1, S_2, \dots, S_N$.*
*Une* marche aléatoire *sur $E = \{S_1\ ;\ S_2\ ;\ \cdots\ ;\ S_N\}$ est une suite de variables aléatoires $X_n$ prenant chacune pour valeurs les différents états possibles, telle que l'état du processus à l'instant $n+1$ ne dépend que de celui à l'instant $n$, mais non de ses états antérieurs, et ceci indépendamment de $n$.*
*La loi de probabilité de $X_n$ qui donne la probabilité de chaque état à l'étape $n$ est appelée l'*état probabiliste *à l'étape $n$.*

☛ On note $U_n$ la matrice ligne définie par $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = S_1) & P(X_n = S_2) & \cdots & P(X_n = S_N) \end{pmatrix}$.

**Définition 2.1.2**

*La* probabilité de passage (ou de transition) *de l'état $i$ à l'état $j$ en une étape (ou une transition) est la probabilité $p_{i,\,j} = P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j)$.*

**Définition 2.1.3**

*La matrice dont l'élément situé à la ligne $i$ et à la colonne $j$ est $p_{i,\,j}$ est la* matrice de transition *de la marche aléatoire.*

**Proposition 2.1.1**

*Soit une matrice $M$ de transition formée des éléments $p_{i,\,j}$.*

- *Tous ses éléments sont compris entre $0$ et $1$ : $0 \leqslant p_{i,\,j} \leqslant 1$.*
- *La somme des éléments de chaque ligne est égale à $1$ : $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=N} p_{i,\,j} = 1$.*

*Une matrice $M$ qui vérifie les deux propriétés précédentes est une* matrice stochastique.

## 2.2 Graphe associé à une matrice de transition

À toute marche aléatoire on peut associer un graphe :

- Les états sont représentés par des points : ce sont les *sommets* du graphe.
- le passage d'un état à un autre est symbolisé par un arc orienté reliant deux sommets (un sommet pouvant être relié à lui-même) : ce sont les *arêtes* du graphe.
- Sur chaque arc orienté de l'état $i$ vers l'état $j$ est notée la probabilité $p_{i,\,j}$.

✏ Chercher les exercices 23 et 24 page 123.

## 2.3 Marche aléatoire à deux états

**Proposition 2.3.1**

*Toute matrice de transition d'une marche aléatoire à deux états est :*

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

*où $a = P_{\{X_n=S_1\}}(X_{n+1} = S_2)$ et $b = P_{\{X_n=S_2\}}(X_{n+1} = S_1)$.*

**Proposition 2.3.2**
*Soit* $U_n$ *la matrice ligne associée à une marche aléatoire à l'instant* $n$.
*Si* $M$ *est la matrice de transition, alors pour tout entier naturel* $n$, $U_{n+1} = U_n M$ *et* $U_n = U_0 M^n$.

☛ Démontrer la proposition 2.3.2 dans le cas d'une marche aléatoire à deux états.

# 3 Étude asymptotique des marches aléatoires

## 3.1 Étude asymptotique d'une marche aléatoire à deux états

**Théorème 3.1.1**
*Soit une marche aléatoire à deux états dont la matrice de transition est :*

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

*avec* $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ *et* $(a\,;\,b) \neq (1\,;\,1)$.
*La suite des états probabilistes converge vers un état indépendant de la distribution initiale appelé* état stable.
*L'état stable* $\pi$ *est défini par* $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. *L'état stable* $\pi$ *est solution de l'équation* $UM = U$.

✏ Examiner les cas particuliers : $(a\,;\,b) = (0\,;\,0)$ puis $(a\,;\,b) = (1\,;\,1)$

## 3.2 Étude asymptotique d'une marche aléatoire à N états

**Théorème 3.2.1**
*Soit une marche aléatoire à* $N$ *états (avec* $N \geqslant 3$*) dont la matrice de transition est* $M$.
*S'il existe un entier naturel* $k$ *tel que la matrice* $M^k$ *ne comporte aucun élément égal à* $0$, *alors la suite* $(U_n)$ *décrivant l'état probabiliste de cette marche aléatoire converge.*
*La limite de cette suite définie un état stable. Cet état stable est solution de l'équation* $UM = U$.

☛ La condition (suffisante) pour obtenir un état stable est réalisée, en particulier, lorsque $M$ ne comporte aucun élément nul.

✏ Chercher l'exercice 28 page 123.