EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste.

Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0,45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.

2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.

3. On considère l'algorithme (incomplet) donné **en annexe**. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0,6$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S)\begin{cases} a+b+c=1 \\ 27a+9b+3c=17,4 \\ 125a+25b+5c=73 \end{cases} \qquad \text{et on pose} \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

ANNEXE

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement »(lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8

Variables :	N un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	affecter à U la valeur $0{,}9\times U+0{,}15\times V$	L7
	affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L8