

Exercice - 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β .
 - (a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .
 - (b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.
3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{aligned} a &= n^3 + 2n^2 - 3n \\ b &= 2n^2 - n - 1 \end{aligned}$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. (a) On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$.
- (b) En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n .
- (c) Application :
 - ▶ Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
 - ▶ Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.