Objectifs : de quoi occuper vos vacances entre deux révisions !

EXERCICE - 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $\dfrac{z-2}{z-1} = z$.
   On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) : $\dfrac{z-2}{z-1} = \mathrm{i}$.
   On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2.
   On suppose que M est distinct des points A et B.
   a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.
   b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. **a)** Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:
$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i},$$
   où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i}$.
   On cherchera les solutions sous forme algébrique.

EXERCICE - 2

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.
   a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.
   b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
   a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;\,0)$.
   b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
   c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.
   d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. **a)** Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.
   b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
   c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).
   d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Etablir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.
   a) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.
   b) Etablir que :
$$(\mathrm{e}-\alpha_n)\ln\alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e}-\alpha_n)\,.$$
   c) En déduire, pour $n > 1$, un encadrement de $n(\mathrm{e}-\alpha_n)$.
   d) La suite de terme général $n(\mathrm{e}-\alpha_n)$ est-elle convergente ?