Objectifs : Un premier contact avec les nombres complexes et une équation différentielle !!! Courage !

EXERCICE - 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.
Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{iz-2}{z+i}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
   (On appelle point invariant de f les points M tels que $f(M) = M$).
3. Calculer $\left|z' - i\right| \times |z+i|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a)** Développer $(z+i)^2$ puis factoriser $z^2 + 2iz - 2$.
   b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   (On pourra remarquer que $z' = \dfrac{i(z-z_B)}{z-z_A}$).

EXERCICE - 2

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - y = 0$.
2. Montrer que $h : x \mapsto (5-x)\,\mathrm{e}^x - 2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 2 - \mathrm{e}^x$.
3. Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' - y = 2 - \mathrm{e}^x$ si et seulement si, $(g-h)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' - y = 0$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de $y' - y = 2 - \mathrm{e}^x$ puis la solution particulière dont la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 1 en son point d'abscisse 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^x - 2 - x\mathrm{e}^x.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}$ mises en évidence.
2. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles.
   Vérifier que 0 est l'une d'elles puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'autre solution que l'on notera α.