Corrigé du devoir surveillé n°3

Partie I

1. (a) Si X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\,t^k$, φ_X est un polynôme de degré n.

   Comme X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\varphi_X(1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$ $\boxed{\varphi_X(1)=1}$

   (b) Si φ_X est donnée, par unicité des coefficients d'un polynôme, les $P(X=k)$ sont déterminés de façon unique. Donc la loi de X est entièrement connue.

   — φ_X est une fonction polynôme donc $\forall j\in[\![0,n]\!],\ \varphi_X^{(j)}(X)=\displaystyle\sum_{k=j}^{n}k\,(k-1)\dots(k-j+1)P(X=k)X^{k-j}$

   $=\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\frac{k!}{(k-j)!}P(X=k)X^{k-j}$ et si on évalue en 0 : $\varphi_X^{(j)}(0)=\dfrac{j!}{0!}P(X=j)$, ce qui établit la formule.

   $$\boxed{\forall j\in[\![0,n]\!],\ P(X=j)=\frac{\varphi_X^{(j)}(0)}{j!}}$$

   (c) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,P(X=k)$ et $\varphi'_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,P(X=k)\,t^{k-1}$, donc $\varphi'_X(1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,P(X=k)=E(X)$

   (d) De même, on a $E(X(X-1))=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)P(X=k)$ et $\varphi''_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,(k-1)\,P(X=k)\,t^{k-1}$. Ainsi, $\varphi''_X(1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\,P(X=k)-\sum_{k=0}^{n}k\,P(X=k)=E(X^2)-E(X)$, et $V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\varphi''_X(1)+\varphi'_X(1)-\big(\varphi'_X(1)\big)^2$

2. $\forall t\in[-1,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_nt^n|\leqslant a_n=P(X=n)$.
   La série de terme général a_n converge, et sa somme vaut 1 ; donc la série $\sum a_nt^n$ converge absolument, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
   La convergence absolue entraîne la convergence, donc la série $\sum a_nt^n$ converge et φ_X est bien définie au moins sur le segment $[-1,1]$.

   $$\boxed{\varphi_X(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1}$$

Partie II

1. Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=P(X=0)+t\,P(X=1)=q+p\,t$ *(avec $q=1-p$).*
2. Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}t^k=(p\,t+q)^n$ *(toujours avec $q=1-p$).*
   - ⋆ On constate que $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=(\alpha+\beta\,t)^n$, avec $\alpha=q$ et $\beta=p$.
   - ⋆ Des expressions établies à la question 1b de la partie I, on déduit $\varphi'_X(t)=n\,p\,(p\,t+q)^{n-1}$ et $\varphi''_X(t)=n\,(n-1)p^2\,(p\,t+q)^{n-2}$, donc $E(X)=\varphi'_X(1)=n\,p\,(p+q)^{n-1}=n\,p$ et $V(X)=\varphi''_X(1)+\varphi'_X(1)-\big(\varphi'_X(1)\big)^2=n\,(n-1)p^2+n\,p-n^2\,p^2=n\,p\,q.$

   $$\boxed{E(X)=n\,p\text{ et }V(X)=n\,p\,q}$$

3. (a) $G_1\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(G_1=n)=q^{n-1}\,p$ donc φ_{G_1} est définie sur $\left]-\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{q}\right[$ et

   $\varphi_{G_1}(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n-1}\,p\,t^n=t\,p\sum_{n=1}^{+\infty}(q\,t)^{n-1}=\frac{t\,p}{1-q\,t}.$

   $$\boxed{\varphi_X(t)=\frac{t\,p}{1-q\,t}}$$

(b) G_1 et G_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $H(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$.

Soit $n \geqslant 2$, $[H = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} ([G_1 = k] \cap [G_2 = n-k])$ (événements deux à deux incompatibles) donc $P(H = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P([G_1 = k] \cap [G_2 = n-k]) = \sum_{k=1}^{n-1} P(G_1 = k) \times P(G_2 = n-k)$ car G_1 et G_2 sont indépendantes.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ P(H = n) = \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}\, p \times q^{n-k-1}\, p = (n-1)\, p^2\, q^{n-2}}$$

Le cas particulier $n = 2$ donne $[H = 2] = [G_1 = G_2 = 1]$ donc $P(H = 2) = p^2$ ce qui correspond bien à la formule trouvée.

4. (a) φ_B et φ_{B_n} sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a bien $\forall t \in \mathbb{R},\ (\varphi_B(t))^n = \varphi_{B_n}(t) = (q + p\,t)^n$

De même, φ_{G_1} et $\varphi_{G_1+G_2}$ sont définies sur $\left]\frac{-1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ et

$\forall t \in \left]\frac{-1}{q}, \frac{1}{q}\right[,\ \varphi_{G_1+G_2}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, p^2\, q^{n-2} t^n = (p\,t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\ (q\,t)^{n-2} = \frac{(p\,t)^2}{(1 - q\,t)^2} = (\varphi_{G_1}(t))^2$

(b) Par définition de la fonction génératrice, $\forall t$ convenable $E\left(t^{X+Y}\right) = E\left(t^X\, t^Y\right) = E(t^X)E(t^Y)$ car les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi ; on a donc bien : $\forall t,\ \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Partie III

1. X_1 est une loi certaine qui prend comme unique valeur le réel 1.
   $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathrm{Card}(\Omega) = N^2$. $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si les deux boules tirées portent le même numéro, donc $P(X_2 = 1) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$. Bien sûr on déduit $P(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$.
2. Le nombre de numéros différents est au maximum égal au nombre de tirages, mais aussi au nombre de numéros distincts (donc de boules) dans l'urne. Ainsi $X_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]$
3. (a) Les tirages se font avec remise donc une suite de n tirages consécutifs est une n-liste avec répétition possible d'entiers compris entre 1 et N, par conséquent $\mathrm{Card}(\Omega) = N^n$

   (b) De même que pour X_2 l'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées portent le même numéro, donc $P(X_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}$.
   L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si les boules tirées portent toutes des numéros distincts -ce qui suppose que $n \leqslant N$- donc $P(X_n = n) = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n}$ (choix de n numéros parmi les N disponibles puis permutation).

   (c) Réaliser l'événement $[X_n \leqslant 2]$ revient à choisir les deux numéros que porteront toutes les boules, puis pour chacun des n tirages, déterminer si c'est le premier numéro choisi ou le second ; on a alors $\binom{N}{2} 2^n$ tirages possibles.
   Ainsi $[X_n = 2] = [X_n \leqslant 2] \setminus [X_n = 1]$ et $P(X_n = 2) = \frac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n} = \frac{(N-1)\left(2^{n-1} - 1\right)}{N^{n-1}}$.
4. L'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si $[X_n = k]$ est réalisé et que le $n+1$ième tirage donne un des numéros déjà obtenus précédemment ou bien si $[X_n = k-1]$ est réalisé et que le $n+1$ième tirage apporte un numéro différent de tous ceux déjà obtenus.
   La probabilité d'obtenir un numéro déjà tiré sachant $[X_n = k]$ vaut $\frac{k}{N}$; la probabilité d'obtenir un nouveau numéro sachant $[X_n = k-1]$ vaut $\frac{N-(k-1)}{N}$; donc
   $P(X_{n+1} = k) = P\left(X_n = k\right) \times \frac{k}{N} + P\left(X_n = k-1\right) \times \frac{N - (k-1)}{N}$
5. On vérifie que cette formule est bien valable même pour $k = 1$, ($[X_n = k-1]$ est de probabilité nulle) et pour $k = n+1$, ($[X_n = k]$ est alors de probabilité nulle).

(a) On peut donc multiplier tout par t^k et sommer les formules $(\star)$ pour toutes les valeurs de k entre 1 et $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(X_{n+1}=k)\, t^k = \sum_{k=1}^{n} P\left(X_n=k\right) \times \frac{k}{N}\, t^k + \sum_{k=2}^{n+1} P\left(X_n=k-1\right) \times \frac{N-(k-1)}{N}\, t^k$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{t}{N} \sum_{k=1}^{n} P\left(X_n=k\right)\, k\, t^{k-1} + t \sum_{k=2}^{n+1} P\left(X_n=k-1\right)\, t^{k-1} - \frac{t^2}{N} \sum_{k=2}^{n+1} P\left(X_n=k-1\right)\, (k-1)\, t^{k-2}$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{t}{N}\, \varphi_n'(t) + t\, \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{N} \varphi_n'(t)$$

(b) On dérive et on évalue en $t=1$: $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{n+1}'(t) = \dfrac{1}{N}(1-2\,t)\varphi_n'(t) + \dfrac{t-t^2}{N}\, \varphi_n''(t) + \varphi_n(t) + t\, \varphi_n'(t)$

$$E(X_{n+1}) = -\frac{1}{N}\, E(X_n) + 1 + E(X_n) = \left(1-\frac{1}{N}\right)\, E(X_n) + 1$$

(c) On reconnaît une suite arithmético-géométrique : l'équation aux limites $\ell = \left(1-\dfrac{1}{N}\right)\ell + 1$ donne $\ell = N$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_{n+1}) - N = \left(1-\frac{1}{N}\right)\, (E(X_n)-N) \text{ donc } E(X_n) - N = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\, (E(X_1)-N)$$

$E(X_1) = 1$ donc finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = N\, \left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]}$$

(d) Pour $n=N,\ E(X_N) = N\, \left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N\right]$, or $\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N = \exp\left(N\, \ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$

$$\boxed{E(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\,(1-e^{-1})}$$

Partie IV

1. (a) On remarque que $S_k = F_X(k)$ (fonction de répartition de la variable X), ainsi $(S_k)_k$ est croissante, à valeurs dans $[0,1]$, de plus $\lim\limits_{k\to+\infty} F_X(k) = \lim\limits_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$ par définition d'une fonction de répartition.
Donc $\forall u \in [0,1[,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ S_k > u$ et comme $(S_k)_k$ est croissante, il existe une valeur minimale qui vérifie cette inégalité. Pour cette valeur k on a donc $S_{k-1} \leqslant u < S_k$
$P\left(S_{k-1} \leqslant u < S_k\right) = F_X(k) - F_X(k-1) = P(X=k)$ par définition de la fonction de répartition.

(b)

```
from numpy import *
from random import *
def SIMULPOISSON(x):
    u=random()
    v=exp(-x)
    S=v
    k=0
    while S<=u:
        v*=x/(k+1)
        S+=v
        k+=1
    return k
```

(c)

```
def DESCENDANCE(x, eff):
    descendants=[0]*eff
    for k in range(eff):
        descendants[k]=SIMULPOISSON(x)
    return sum(descendants)
```

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, [Z_n = 0] \Rightarrow [Z_{n+1} = 0]$ car s'il n'y a plus de plantes à la génération n, il ne peut pas y avoir de descendants à la génération suivante. Donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ et $P(Z_n = 0) \leqslant P(Z_{n+1} = 0)$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Cette suite est majorée par 1 (u_n est une probabilité) donc converge, et sa limite ℓ est inférieure ou égale à 1.

3. (a) L'événement $[Z_1 = k]$ étant réalisé, on a $Z_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} W_{j,n}$ et $P\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} W_{j,n} = 0\right) = P\left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} [W_{j,n} = 0]\right)$.

   Les variables $W_{j,n}$ étant indépendantes, on a $P_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} P(W_{j,n} = 0) = \prod_{j=1}^{k} P(Z_{n-1} = 0) = \Big(P(Z_{n-1} = 0)\Big)^k$.

   (b) Soit $n \geqslant 2$, les événements $[Z_1 = k]_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet, donc en appliquant la formule des probabilités totales, $P(Z_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, P_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, \big(P(Z_{n-1} = 0)\big)^k$.

   Finalement, $P(Z_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)\, u_{n-1}^k = \varphi(u_{n-1})$

4. On peut faire le calcul de la fonction génératrice de X (non demandé) et on a :

   $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n}{n!}$ et $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^n\, t^n}{n!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda\, t}$

   $$\boxed{\varphi_X(t) = e^{\lambda\,(t-1)}}$$

   (a) i. Soit $0 < \lambda \leqslant 1$: δ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $\delta'(x) = \lambda\, e^{\lambda\,(x-1)} - 1$. Comme $0 < \lambda$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda\,(x-1)}$ est croissante et $\forall x \in [0,1]$, $e^{-\lambda} \leqslant e^{\lambda\,(x-1)} < e^0 = 1$; puis $\lambda\, e^{-\lambda} \leqslant e^{\lambda\,(x-1)} < \lambda \leqslant 1$. On en déduit que δ est strictement décroissante sur $[0,1]$. $\delta(1) = 0$, donc $\forall x \in [0,1],\ \delta(x) \geqslant 0$.
   La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie encore $\varphi(\ell) = \ell$ c'est à dire $\delta(\ell) = 0$; comme on a montré que (u_n) converge, c'est forcément vers 1.

   ii. On peut par exemple itérer la fonction DESCENDANCE jusqu'à ce que l'effectif soit nul et renvoyer le nombre d'itérations ; mais bien sûr dans le cas où il n'y a pas extinction, le programme boucle.

```
def EXTINCTION(x, eff):
    generation=0
    while eff>0:
        eff=DESCENDANCE(x, eff)
        generation+=1
    return generation
```

   (b) i. θ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\theta'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$; donc θ est décroissante sur $[1, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$, avec un minimum atteint pour $x = e$: $\theta(e) = 1 - e^{-1}$. De plus, $\theta(1) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \theta(x) = 1$, donc $\forall x \in [1, +\infty[,\ \theta(x) \leqslant 1$

   ii. $\delta'(x) = \lambda\, e^{\lambda\,(x-1)} - 1$ et $\delta''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda\,(x-1)} > 0$, donc δ' est strictement croissante sur $[0,1]$ et réalise une bijection de $[0,1]$ vers $\delta'\big([0,1]\big)$.
   $\delta'(0) = \lambda\, e^{-\lambda} - 1$; l'étude de θ sur $[1, +\infty[$ montre que $\forall \lambda \geqslant 1$, $\ln\lambda < \lambda$ donc $\delta'(0) < 0$.
   $\delta'(1) = \lambda - 1 > 0$, donc il existe un unique $\beta \in]0,1[$ tel que $\delta'(\beta) = 0$.

   Ainsi δ est décroissante sur $[0, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, 1]$.
   $\delta(0) = e^{-\lambda} > 0$, $\delta(1) = 0$, donc il existe un unique $\alpha \in]0, \beta[$ tel que δ est positive sur $[0, \alpha[$, négative sur $]\alpha, 1]$, et bien sûr $\delta(\alpha) = 0$.

   iii. $u_1 = e^{-\lambda} = \delta(0)$, par croissance de φ, puisque $0 < \alpha$, on a $\varphi(0) < \varphi(\alpha) = \alpha$ donc $u_1 < \alpha$. Par récurrence sur n on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \alpha$:
   Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $u_n \leqslant \alpha$; par croissance de φ sur $[0, \alpha]$, on a $u_{n+1} = \varphi(u_n) \leqslant \varphi(\alpha) = \alpha$
   La suite (u_n) est croissante, majorée par α ; elle converge vers α, qui est l'unique point fixe de φ sur le segment $[0, \alpha]$.

5. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $A_n \subset A_N$, donc $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n = A_N$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n = A_N$. Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient l'égalité des deux ensembles.

(b) $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n\right) = P(A_N)$, donc par passage à la limite, $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} P(A_N)$.

(c) L'événement $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$ est réalisé si et seulement s'il existe une génération n_0 pour laquelle il n'y a aucun descendant *(et par conséquent les générations suivantes sont éteintes) ;* autrement dit si la population de plantes s'éteint au bout d'un certain temps.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} (Z_n = 0)\right)$, donc la limite de (u_n) mesure la probabilité d'extinction de la population.

À la question 4a la limite de (u_n) vaut toujours 1, donc la population s'éteint presque certainement au bout d'un temps fini. Pour la question 4b l'extinction n'est pas certaine car $\alpha < 1$.