Corrigé du devoir n^o 6

Problème 1

Préliminaires

1. U est à valeurs dans $[0,1[$ donc $\ln(1-U)$ est négatif et X est à valeurs positives, donc $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$:
   $[X \leqslant t] = [\ln(1-U) \geqslant -\lambda\, t] = [1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda\, t}] = [U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t}]$, soit $F_X(t) = F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t})$.
   — Si $t<0$, alors $\mathrm{e}^{-\lambda\, t} > 1$ et $1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t} < 0$ donc $F_X(t) = F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t}) = 0$ *(on retrouve que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$).*
   — Si $t \geqslant 0$, alors$0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t} < 1$ donc $F_X(t) = F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t}) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda\, t}$
   On en déduit donc :
   $$\boxed{X \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$$
2. On raisonne par récurrence sur n :
   - Pour $n=1$, on retrouve la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc la propriété est vraie.
   - Soit $n \geqslant 1$, supposons que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une variable à densité dont une densité est donnée par la formule de l'énoncé. D'après la formule rappelée en en-tête, S_{n+1} est une variable à densité dont une densité f_{n+1} est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ f_1(x-t)\ \mathrm{d}t$
     Pour $t<0,\ f_n(t) = 0$ donc $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ f_1(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \times f_1(x-t)\ \mathrm{d}t$
     D'autre part si $x<0$, alors $\forall t \geqslant 0, x-t<0$, donc $f_1(x-t) = 0$ et $f_{n+1}(x) = 0$.
     Enfin si $x \geqslant 0$, alors $(x-t \geqslant 0$ et $t \geqslant 0) \iff 0 \leqslant t \leqslant x$ donc $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \times \lambda\, e^{-\lambda(x-t)}\ \mathrm{d}t$
     $= \lambda^2\, e^{-\lambda\, x} \displaystyle\int_0^x \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\ \mathrm{d}t = \lambda^2\, e^{-\lambda\, x}\left[\frac{(\lambda t)^n}{\lambda\, n!}\right]_0^x = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\,\frac{(\lambda x)^n}{n!}$
     La formule est donc établie pour S_{n+1} donc la propriété est héréditaire.

Le paradoxe de l'autobus

Soit $t \geqslant 0$

1. (a) $[N_t = n]$ est l'événement : « n bus exactement sont passés avant l'instant t », donc le n^{e} bus est arrivé à t au plus tard, $[S_n \leqslant t]$ et le $n+1^{\text{e}}$ n'est pas encore passé à t, $[S_{n+1} > t]$.

   (b) L'événement $[S_{n+1} \leqslant t]$ est inclus dans $[S_n \leqslant t]$ donc $\Big[S_n \leqslant t < S_{n+1}\Big] = \Big[S_n \leqslant t\Big] \cap \overline{\Big[S_{n+1} \leqslant t\Big]}$ et $P\big(N_t = n\big) = P\Big(S_n \leqslant t < S_{n+1}\Big) = P\Big(S_n \leqslant t\Big) - P\Big(S_{n+1} \leqslant t\Big)$

   (c) $P\Big(S_{n+1} \leqslant t\Big) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\, u}\,\frac{(\lambda u)^n}{n!}\ \mathrm{d}u = \left[-e^{-\lambda\, u} \times \frac{(\lambda u)^n}{n!}\right]_0^t + \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\, u}\,\frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}\ \mathrm{d}u$
   $$= -e^{-\lambda\, t} \times \frac{(\lambda t)^n}{n!} + P\Big(S_n \leqslant t\Big)$$
   Ainsi, $\forall t \geqslant 0,\ P\big(N_t = n\big) = e^{-\lambda\, t} \times \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$, donc
   $$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ N_t \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda\, t)}$$

2. (a) W représente le temps écoulé depuis le passage du dernier bus arrivé, c'est à dire le temps d'attente d'une personne qui serait arrivée au moment précis où le bus numéro N_{t_0} repartait.

   (b) Z représente le temps qui reste avant que le prochain bus arrive, c'est à dire le temps d'attente d'une personne qui arrive à l'instant t_0 pour prendre le prochain bus.

3. (a)
   - ⋆ r représente le temps d'attente total pour le k^{e} bus ;
   - ⋆ s représente le temps d'attente total (pour le $k+1^{\text{e}}$ bus) ;
   - ⋆ u représente le temps restant à attendre à l'instant T avant le passage du prochain bus (variable Z) ;
   - ⋆ v représente le temps d'attente entre les deux derniers bus (variable W) ;
   - ⋆ N représente le nombre de bus passés jusqu'à l'instant T.

   (b)
   - ⋆ Deux bus ($n°1$ et $n°2$) sont passés jusqu'à l'instant 2, il reste $2,14$ minutes à attendre avant le passage du prochain, les passages des bus $n°2$ et 3 sont distants de $3,77$ minutes.

- ⋆ En 10 minutes il n'est passé qu'un bus (au bout de moins d'une minute) et il reste quasiment 10 minutes à attendre avant le prochain.
- ⋆ En 100 minutes il est passé 14 bus, le dernier il y a $0,23$ minutes, le prochain est prévu dans $1,64$ minutes.

(c) Les valeurs affichées représentent respectivement :
- ⋆ Le temps moyen restant avant le prochain passage de bus à l'instant $T = 100$;
- ⋆ L'attente moyenne entre le dernier bus passé et celui à venir ;
- ⋆ Le nombre moyen de bus passés en 100 minutes.

La durée entre les deux derniers passages est presque égale au double du temps moyen d'attente, ce qui peut sembler paradoxal.

4. (a) Considérons le système complet d'événements $\left[N_{t_0} = k\right]$, $k \in \mathbb{N}$.

L'événement $\left[N_{t_0} = k\right] \cap \left[S_{N_{t_0}} \leqslant t\right]$ est réalisé si et seulement si le k^{e} bus est déjà passé à l'instant t, donc bien sûr aussi à l'instant t_0, mais que le $k+1^{\text{e}}$ bus arrive après l'instant t_0 :

$$\left[S_{N_{t_0}} \leqslant t\right] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Big(\left[S_{N_{t_0}} \leqslant t\right] \cap \left[N_{t_0} = k\right]\Big) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Big(\left[N_{t_0} = k\right] \cap \left[S_k \leqslant t < S_{k+1}\right]\Big) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Big(\left[S_k \leqslant t < t_0 < S_{k+1}\right]\Big)$$

(b) $\left[t_0 - S_k < t_0 - \alpha \leqslant S_{k+1} - S_k = X_{k+1}\right]$ entraîne $\left[\alpha < S_k < t_0 \leqslant S_{k+1}\right]$ et $\left[\alpha < S_k \leqslant \beta < t_0 \leqslant S_{k+1}\right]$ entraîne $\left[t_0 - \beta < t_0 - S_k \leqslant S_{k+1} - S_k = X_{k+1}\right]$, on en déduit la double inclusion annoncée.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$:
S_k et X_{k+1} sont indépendantes donc $P\Big(\left[\alpha < S_k \leqslant \beta\right] \cap \left[t_0 - \alpha \leqslant X_{k+1}\right]\Big) = P\Big(\left[\alpha < S_k \leqslant \beta\right]\Big) \times P\Big(\left[t_0 - \alpha \leqslant X_{k+1}\right]\Big) = \Big(F_k(\beta) - F_k(\alpha)\Big) \times \Big(1 - P\big(X_{k+1} < t_0 - \alpha\big)\Big)$

De même $P\Big(\left[\alpha < S_k \leqslant \beta\right] \cap \left[t_0 - \beta \leqslant X_{k+1}\right]\Big) = \Big(F_k(\beta) - F_k(\alpha)\Big) \times \Big(1 - P\big(X_{k+1} < t_0 - \beta\big)\Big)$

Donc en remarquant que X_{k+1} suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda\, t_0$ et divisant membre à membre par $\beta - \alpha$ qui est positif, on a :

$$\frac{F_k(\beta) - F_k(\alpha)}{\beta - \alpha} \times \exp\left(-\lambda\,(t_0 - \alpha)\right) \leqslant \frac{G_k(\beta) - G_k(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqslant \frac{F_k(\beta) - F_k(\alpha)}{\beta - \alpha} \times \exp\left(-\lambda\,(t_0 - \beta)\right)$$

(c) F_k est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par passage à la limite lorsque α et β tendent vers t, on obtient $G'(t) = F'_k(t) \times \exp\left(-\lambda\,(t_0 - t)\right) = \exp\left(-\lambda\,(t_0 - t)\right) \times \lambda\, e^{-\lambda\, t} \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda\, t_0} \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$

G_k s'obtient par intégration en remarquant que $\lim\limits_{t \to 0} G_k(0) = 0$:

$$\forall t \in]0, t_0[,\ G_k(t) - G_k(0) = G_k(t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\, t_0} \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{d}u = e^{-\lambda\, t_0} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

D'autre part pour $k = 0$, $G_0(t) = P\Big(0 \leqslant t < t_0 < X_1\Big) = e^{-\lambda\, t_0} = e^{-\lambda\, t_0} \dfrac{(\lambda t)^0}{0!}$, donc la formule établie pour $k \in \mathbb{N}^*$ reste valable pour $n = 0$.

(d)
- La formule établie à la question 4a entraîne que $G(t)$ s'exprime comme la somme de la série de terme général $e^{-\lambda\, t_0} \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$: $G(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda\, t_0} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda\,(t_0 - t)}$
- $S_{N_{t_0}}$ est à valeurs positives, donc $P(S_{N_{t_0}} \leqslant 0) = P(S_{N_{t_0}} = 0) = \lim\limits_{t \to 0} e^{-\lambda\,(t_0 - t)} = e^{-\lambda\, t_0} \neq 0$; par conséquent $S_{N_{t_0}}$ n'est pas une variable à densité.
- $P(S_{N_{t_0}} = 0) + \displaystyle\int_0^{t_0} G'(t) = e^{-\lambda\, t_0} + \left[G(t)\right]_0^{t_0} = e^{-\lambda\, t_0} + G(t_0) - G(0) = 1$

(e) L'espérance de $S_{N_{t_0}}$ est égale à $\displaystyle\int_0^{t_0} t\, \lambda\, e^{-\lambda\,(t_0 - t)} \mathrm{d}t = \left[t\, e^{-\lambda\,(t_0 - t)}\right]_0^{t_0} - \int_0^{t_0} e^{-\lambda\,(t_0 - t)} \mathrm{d}t = t_0 + \frac{e^{-\lambda\, t_0} - 1}{\lambda}$

On en déduit l'espérance de W : $E(W) = \dfrac{1 - e^{-\lambda\, t_0}}{\lambda}$

5. (a) En reprenant le même système complet d'événements $\left[N_{t_0+1} = k+1\right]$, $k \in \mathbb{N}$, on a :

L'événement $\Big[N_{t_0}+1=k+1\Big]\cap\Big[S_{N_{t_0+1}}>t\Big]$ est réalisé si et seulement si le k^{e} bus est déjà passé à l'instant t_0, donc bien sûr aussi à l'instant t, mais que le $k+1^{\text{e}}$ bus arrive après l'instant t :

$$\begin{aligned}\Big[S_{N_{t_0+1}}>t\Big] &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}\Big(\big[S_{N_{t_0+1}}>t\big]\cap\big[N_{t_0+1}=k+1\big]\Big)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\Big(\big[N_{t_0}=k\big]\cap\big[S_k\leqslant t_0<t<S_{k+1}\big]\Big)\\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}\Big(\big[S_k\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]\Big)\end{aligned}$$

(b) Si l'événement $\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]$ est réalisé, alors $\big[X_{k+1}=S_{k+1}-S_k\geqslant t-S_k\geqslant t-\beta\big]$ l'est aussi, donc
$\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]\subset\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\big]\cap\big[t-\beta\leqslant X_{k+1}\big]$
De même si $\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\big]\cap\big[t-\alpha\leqslant X_{k+1}\big]$ est réalisé, alors nécessairement $\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]$
On a donc la double inclusion suivante :
$\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\big]\cap\big[t-\alpha\leqslant X_{k+1}\big]\subset\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]\subset\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\big]\cap\big[t-\beta\leqslant X_{k+1}\big]$
En remarquant que $P\Big(\big[\alpha<S_k\leqslant\beta\leqslant t<t_0<S_{k+1}\big]\Big)=H_k(\beta)-H_k(\alpha)$, on obtient :

$$\frac{F_k(\beta)-F_k(\alpha)}{\beta-\alpha}\times\exp\left(-\lambda\left(t-\alpha\right)\right)\leqslant\frac{H_k(\beta)-H_k(\alpha)}{\beta-\alpha}\leqslant\frac{F_k(\beta)-F_k(\alpha)}{\beta-\alpha}\times\exp\left(-\lambda\left(t-\beta\right)\right)$$

(c) Donc comme à la question 4b, on obtient par passage à la limite lorsque α et β tendent vers u :

$$H_k'(u)=F_k'(u)\times\exp\left(-\lambda\left(t-u\right)\right)=\exp\left(-\lambda\left(t-u\right)\right)\times\lambda\,e^{-\lambda\,u}\,\frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,\frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}$$

(d) On obtient, comme précédemment pour G, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall u\in[0,t_0],\ H_k(u)=e^{-\lambda\,t}\,\dfrac{(\lambda u)^k}{k!}$, donc en particulier pour $u=t_0,\ H_k(t_0)=e^{-\lambda\,t}\,\dfrac{(\lambda t_0)^k}{k!}$ et pour $k=0,\ H_0(t_0)=P(t<X_1)=e^{-\lambda\,t}$,

(e) $H(t_0)=P\Big(S_{N_{t_0+1}}>t\Big)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}H_k(t_0)=e^{-\lambda\,t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t_0)^k}{k!}=e^{-\lambda\,(t-t_0)}$.

On a donc bien $P\Big(S_{N_{t_0+1}}-t_0>t-t_0\Big)=P\Big(S_{N_{t_0+1}}>t\Big)=e^{-\lambda\,(t-t_0)}$, donc par le changement de variable $v=t-t_0$, on reconnaît une loi exponentielle de paramètre λ.

(f) Les variables X_k, donc les temps d'attente entre chaque bus, sont indépendants, de même loi exponentielle de paramètre λ, donc d'espérance λ, ce résultat était prévisible.

6. Z suit une loi exponentielle de paramètre λ donc admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$; W admet une espérance égale à $\dfrac{1-e^{-\lambda\,t}}{\lambda}$ donc l'espérance de $W+Z$ est égale à la somme soit $\dfrac{2-e^{-\lambda\,t}}{\lambda}$.

On retrouve bien l'espérance de W dont la valeur théorique est $9,999$ en accord avec l'estimation donnée par la simulation de la question 3 et le temps entre deux autobus $(W+Z)$

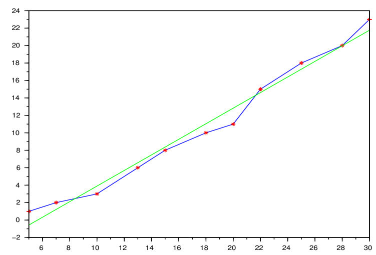
Problème 2

Tentative d'ajustement affine

1. $\widehat{b}=\dfrac{\operatorname{cov}(x,\theta)}{\operatorname{Var}(\theta)}$ et $\widehat{a}=\bar{x}-\widehat{b}\,\bar{\theta}$ (formules de cours).

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}x_k=117\,,\ \sum_{k=1}^{11}\theta_k=193\,,\ \sum_{k=1}^{11}\theta_k\,x_k=2677\,,\ \sum_{k=1}^{11}\theta_k^2=4085\,,\ \sum_{k=1}^{11}x_k^2=1813$

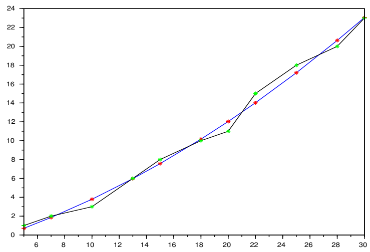
3. $R=\dfrac{\operatorname{cov}(x,\theta)}{\sqrt{V(x)\,V(\theta)}}\simeq 0,9903$ et $R^2\simeq 0,9807$, le coefficient de corrélation linéaire et le coefficient de détermination sont très proches de 1, donc a priori satisfaisants.

4. Avec une précision de 10^{-2}, la droite de régression linéaire a pour équation $x = 0,89\,\theta - 5,04$.
   Remarque : il convient d'être réaliste dans les calculs et de se souvenir qu'on effectue une estimation, donc qu'on a des valeurs approchées ; même si la précision avec laquelle sont faites les mesures n'est pas mentionnée, une dizaine de chiffres significatifs est un non sens ! Pour estimer l'erreur avec un ordre de grandeur inférieur au nanomètre, il faudrait déjà que les mesures garantissent au minimum cette précision (demander à M. Dupin et à M. Réjaud ce qu'ils en pensent).
5. 
6. Les résidus sont tous positifs aux extrémités et négatifs au milieu, donc pas répartis de façon aléatoire ; on a plus probablement une parabole.

Ajustement quadratique

1. • Les coordonnées de $\overrightarrow{H}$ sont justement α, β et γ car la projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur un sous-espace réalise le minimum de distance de l'extrémité de $\overrightarrow{X}$ à un point quelconque de ce sous-espace.
   • S est une fonction de trois variables dérivable sur $\mathbb{R}^3$, donc si elle admet un minimum en un point, c'est en un point critique. Ainsi, puisqu'on sait que ce minimum est atteint en un point unique, ses coordonnées sont déterminées par l'annulation des trois dérivées partielles de S.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x}(a,b,c) = -2\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\left(x_k - a - b\,\theta_k - c\,\theta_k^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y}(a,b,c) = -2\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\theta_k\,\left(x_k - a - b\,\theta_k - c\,\theta_k^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial z}(a,b,c) = -2\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\theta_k^2\,\left(x_k - a - b\,\theta_k - c\,\theta_k^2\right) = 0 \end{cases}$$
2. $\left\|\overrightarrow{\mathrm{U}}\right\|^2 = 11$, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{B}}\right\|^2 = 4085$, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{C}}\right\|^2 = 2406725$, $\overrightarrow{\mathrm{B}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{U}} = 193$, $\overrightarrow{\mathrm{C}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{U}} = 4085$, $\overrightarrow{\mathrm{B}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{C}} = 96097$, $\overrightarrow{\mathrm{X}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{U}} = 117$, $\overrightarrow{\mathrm{X}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{B}} = 2677$, $\overrightarrow{\mathrm{X}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{C}} = 65767$.
   On a le système vectoriel $a\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{C}} = \overrightarrow{\mathrm{X}}$, qui donne en effectuant successivement les produits scalaires avec $\overrightarrow{\mathrm{U}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C}}$:
$$\begin{cases} 11a + 193\,b + 4085\,c = 117 & \textit{Produit scalaire } (a\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{C}}) \bullet \overrightarrow{\mathrm{U}} \\ 193a + 4085\,b + 96097\,c = 2677 & \textit{Produit scalaire } (a\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{C}}) \bullet \overrightarrow{\mathrm{B}} \\ 4085a + 96097\,b + 2406725\,c = 65767 & \textit{Produit scalaire } (a\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{C}}) \bullet \overrightarrow{\mathrm{C}} \end{cases}$$
3. La résolution à la calculatrice donne $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1.679\,;\ 0.408\,;\ 0.014)$.
4. $\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{X}}$, donc les vecteurs $\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{X}} - \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} - \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} - \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}$ sont orthogonaux, ainsi : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{X}}\right\|^2 = \left\|\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\mathrm{X}} - \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} - \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} - \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}\right\|^2$
5. $\overrightarrow{\mathrm{X}} - \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{U}} - \beta\,\overrightarrow{\mathrm{B}} - \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{C}}$ est orthogonal à F donc à toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathrm{U}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C}}$; par conséquent le théorème de Pythagore s'applique et donne la formule sur les sommes des carrés des résidus.
6. $R^2 \simeq \dfrac{564.52}{4.025 + 564.52} \simeq 0.993$

7.



8. Les signes des résidus sont aléatoires et R^2 est proche de 1, donc le modèle est acceptable.

Ajustement quadratique

```
from numpy import*
#****************************************
def ProdScal(X,Y):
    R=sum(X*Y)
    return R
#****************************************
def Matrice(B):
    U=array([1]*len(B))
    L1=[ProdScal(U,U),ProdScal(B,U),ProdScal(B**2,U)]
    L2=[ProdScal(U,B),ProdScal(B,B),ProdScal(B**2,B)]
    L3=[ProdScal(U,B**2),ProdScal(B,B**2),ProdScal(B**2,B**2)]
    return matrix([L1,L2,L3])
#*****************************************
X=array([1,2,3,6,8,10,11,15,18,20,23])
B=array([5,7,10,13,15,18,20,22,25,28,30])
U=array([1]*len(B))
C=matrix([[ProdScal(X,U)],[ProdScal(X,B)],[ProdScal(X,B**2)]])
Estimation=Matrice(B)**(-1)*C
print("l'Estimation de a vaut ",Estimation[0,0])
print("l'Estimation de b vaut ",Estimation[1,0])
print("l'Estimation de c vaut ",Estimation[2,0])
Residus=X-Estimation[0,0]*U-Estimation[1,0]*B-Estimation[2,0]*B**2
SCR=ProdScal(Residus,Residus)
print("La somme des carrés des résidus vaut ",SCR)
```