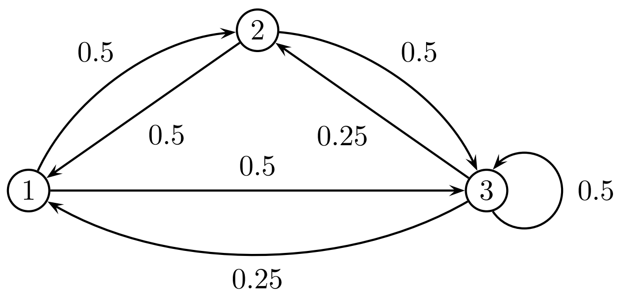
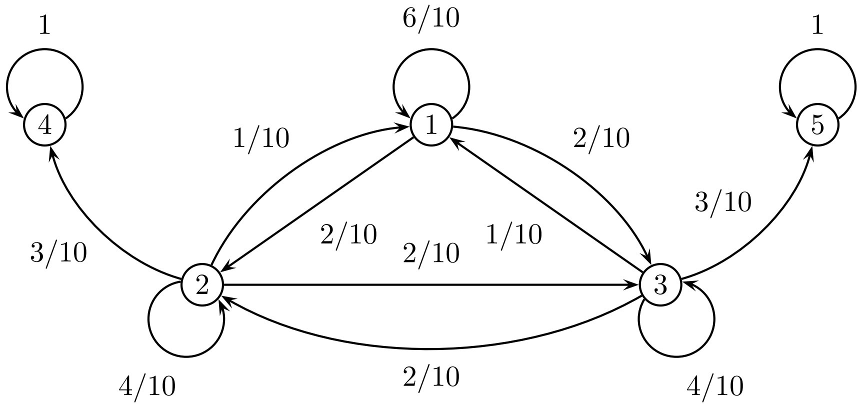
MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°4
Durée : 2 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On appellera «graphe» tout dessin du type de l'un des deux exemples $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ ci-dessous.



Le graphe $\mathscr{G}_1$



Le graphe $\mathscr{G}_2$

Les sommets du graphe sont les cercles numérotés (de 1 à 3 dans le graphe $\mathscr{G}_1$, de 1 à 5 dans le graphe $\mathscr{G}_1$). Les flèches du graphe sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera les points suivants :

- Entre deux sommets distincts i et j, on peut avoir une flèche de i vers j et une flèche de j vers i.
- Certains couples de sommets ne sont pas reliés par une flèche (par exemple 1 et 4 dans le graphe $\mathscr{G}_2$).
- Une flèche peut relier un sommet à lui-même (c'est par exemple le cas du sommet 3 de $\mathscr{G}_1$).
- Pour tout couple (i,j) de sommets, la flèche allant de i vers j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0,1]$ représentant la probabilité de saut (par exemple $s_{3,1} = \frac{1}{4}$ dans le graphe $\mathscr{G}_1$).
- Pour tout sommet i, la somme des probabilités étiquetant les flèches issues de i est égale à 1.

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur l'un des sommets d'un graphe $\mathscr{G}$. Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ de ce sommet i sur un autre sommet de ce graphe $\mathscr{G}$, en suivant les sens des flèches partant de i, la probabilité qu'elle se positionne alors sur le sommet j valant $s_{i,j}$..
Le processus se poursuit indéfiniment, la particule sautant à chaque instant suivant $n = 1, 2, 3, \cdots$ du sommet du grpahe où elle se trouve vers un nouveau nouveau sommet (événtuellemenbt le même) en suivant aléatoirement l'une des flèches selon les probabilités indiquées. On suppose que les sommets du graphe sont numérotés de 1 à m.
Le processus décrit ci-dessus définit alors une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \cdots, m\}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ vaut k si la particule se trouve sur le sommet k après le $n^{\text{ème}}$ saut.

$\mathcal{A}$ est appelée ***marche aléatoire*** sur le graphe $\mathscr{G}$

Partie I

Considérons les matrices réelles suivantes :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à la matrice A.

1. Résoudre le système S_λ de paramètre λ et d'inconnue X suivant : $AX = \lambda X$.
2. En déduire les valeurs propres de la matrice A en précisant les espaces propres associés.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? La matrice A est-elle inversible ?
4. On pose $\overrightarrow{I} = (1, 1, -2)\,,\ \overrightarrow{J} = (+1, -1, 0)\,,\ \overrightarrow{K} = (1, 1, 2)\,.$
   (a) Justifier que $\left\langle \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K} \right\rangle$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Expliciter la matrice P de passage de la base canonique à cette nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Que vaut $D = P^{-1}AP$?
5. Soit n un entier naturel quelconque.
   (a) Exprimer la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice A en fonction de P, P^{-1} et D.
   (b) Expliciter la matrice P^{-1}, puis la matrice A^n.

Partie II

Considérons les matrices réelles suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Nous rappelons que I_n désigne la matrice de l'application identique Id_n de $\mathbb{R}^n$

1. Discuter selon les valeurs de λ le rang de la matrice $B_{11} - \lambda I_3$.
2. En déduire que B_{11} admet exactement 3 valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 vérifiant $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 10$.
3. Déterminer les espaces propres E_1, E_2 et E_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de cette matrice B_{11}.
4. Donner trois vecteurs $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$ respectifs de E_1, E_2, E_3 dont la dernière coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut 1.
5. Montrer que 10 est une valeur propre de B dont l'espace propre associé est au moins de dimension 2.
6. Nous supposerons dans cette question que :
   λ est une valeur propre de B distincte de 10 et $\overrightarrow{U} = (x, y, z, t, u)$ un vecteur propre associé.
   Montrer alors que λ est une des valeurs propres de B_{11} et $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ un vecteur propre de B_{11}.
7. En vous appuyant sur les résultats obtenus aux trois questions précédentes, Déterminer :
   — un vecteur $\overrightarrow{U_1} = (x, y, 8, t, u)$ tel que : $f\left(\overrightarrow{U_1}\right) = \lambda_1 \overrightarrow{U_1}$.
   — un vecteur $\overrightarrow{U_2} = (x, y, 2, t, u)$ tel que : $f\left(\overrightarrow{U_2}\right) = \lambda_2 \overrightarrow{U_2}$.
   — un vecteur $\overrightarrow{U_3} = (x, y, 2, t, u)$ tel que : $f\left(\overrightarrow{U_3}\right) = \lambda_3 \overrightarrow{U_3}$.
8. Conclure ! Vous préciserez en particulier les points suivants :
   — Quelles sont les valeurs propres de B ? La matrice B est-elle inversible ?
   — Pour quelles raisons la matrice B est-elle diagonalisable ?
9. Tous calculs faits, vous devriez obtenir :

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}8^n & -\frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & -\frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}8^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}8^n & -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{4}4^n + \frac{1}{4}8^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}4^n - \frac{3}{4}8^n + \frac{1}{2}10^n & -\frac{3}{16}2^n - \frac{1}{8}4^n - \frac{3}{8}8^n + \frac{11}{16}10^n & \frac{3}{16}2^n - \frac{1}{8}4^n - \frac{3}{8}8^n + \frac{5}{16}10^n & 10^n & 0 \\ \frac{1}{4}4^n - \frac{3}{4}8^n + \frac{1}{2}10^n & \frac{3}{16}2^n - \frac{1}{8}4^n - \frac{3}{8}8^n + \frac{5}{16}10^n & -\frac{3}{16}2^n - \frac{1}{8}4^n - \frac{3}{8}8^n + \frac{11}{16}10^n & 0 & 10^n \end{pmatrix}$$

Nous ne vous demandons pas d'expliciter les calculs, mais d'indiquer les facteurs du produit matriciel qui à permis de trouver ce résultat !

Partie III

On considère ici la marche aléatoire $\mathcal{A}_1 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphe $\mathscr{G}_1$ partant de $X_0 = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(X_n = 1)$, $q_n = P(X_n = 2)$, $r_n = P(X_n = 3)$ et $Y_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$

1. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable X_n, établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Que vaut $P(X_n = 3)$ pour $n \geq 1$? Justifier votre réponse.
3. Prouver pour tout entier naturel n, $Y_n = A^n Y_0$.
4. À l'aide des résultats obtenus dans la partie I, déterminer pour tout entier naturel n non nul la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

Partie IV

On considère ici la marche aléatoire $\mathcal{A}_2 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphe $\mathscr{G}_2$. On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou le sommet 5, elle y reste indéfiniment avec la probabilité 1 : ces deux sommets sont dits ***absorbants***. On dit alors que la marche aléatoire est absorbée en 4 ou en 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant.

On s'intéresse ici à la probabilité que la marche $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en 4 ou en 5 en fonction de son point de départ. Pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et 5, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.

1. Donner les valeurs de $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{4, 5\}^2$.
2. En distinguant les cas selon le résultat du premier saut de la particule, montrer que le triplet $(x, y, z) = (a_{14}, a_{24}, a_{34})$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{6}{10}x & + & \frac{2}{10}y & + & \frac{2}{10}z & & = x \\ \frac{1}{10}x & + & \frac{4}{10}y & + & \frac{2}{10}z & +\frac{3}{10} & = y \\ \frac{1}{10}x & + & \frac{2}{10}y & + & \frac{4}{10}z & & = z \end{array}\right.$$

   Résoudre ce système.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(X_n = 1)$, $q_n = P(X_n = 2)$, $r_n = P(X_n = 3)$, $s_n = P(X_n = 4)$, $t_n = P(X_n = 5)$ et Y_n le vecteur colonne de ces probabilités.
   La formule des probabilités totales conduit également à la formule : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \left(\frac{1}{10}B\right)^n Y_0$.
   Nous nous proposons alors de retrouver les valeurs de a_{14}, a_{24}, a_{34} obtenues précédemment en utilisant le résultat final obtenu dans la partie II.
   (a) En utilisant la valeur de B^n dans la partie II, donnez pour tout entier naturel non nul n et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la probabilité que la particule atteigne le sommet 4 pour la première fois après le $n^{\text{ième}}$ saut sachant que $X_0 = i$.
   Retrouver les valeurs de a_{14}, a_{24}, a_{34}.
   (b) En utilisant la valeur de B^n dans la partie II, donnez pour tout entier naturel non nul n et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la probabilité que la particule atteigne le sommet 5 pour la première fois après le $n^{\text{ième}}$ saut sachant que $X_0 = i$.
   En déduire les valeurs de a_{15}, a_{25}, a_{35}.
   (c) Montrer que l'absorbtion de la marche aléatoire $\mathcal{A}_2$ par les sommets 4 ou 5 est un événement presque certain.
   (d) On suppose que X_0 est distribuée selon la Loi Uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.
   Quelle est la probabilité sachant que $\mathcal{A}_2$ est absorbée par 4 que $\mathcal{A}_2$ soit partie du sommet 3 ?