# Corrigé du devoir maison n$^o$ 12

## Partie I

1. Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = E\big(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n\big) = E(\Delta_1) + \cdots + E(\Delta_n) = n \times \dfrac{1}{a}$.

   Les variables $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sont indépendantes,donc $V(T_n) = V\big(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n\big) = V(\Delta_1) + \cdots + V(\Delta_n) = n \times \dfrac{1}{a^2}$.

$$\boxed{E(T_n) = \frac{n}{a}\ ,\ V(T_n) = \frac{n}{a^2}}$$

2. $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont indépendantes donc une densité de $T_2$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\, \mathrm{d}t$

   Pour $t < 0$, $f(t) = 0$ donc $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\, \mathrm{d}t$ ; de même pour $x < t$, $f(x-t) = 0$ donc

   Si $x \geqslant 0$, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, f(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x a\,\mathrm{e}^{-a\,t} \times a\,\mathrm{e}^{-a\,(x-t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^x a^2\,\mathrm{e}^{-a\,x}\, \mathrm{d}t = a^2\,x\,\mathrm{e}^{-a\,x}$ et
   si $x < 0$ alors $\forall t \geqslant 0$ on a $x - t < 0$ donc $f_2(x) = 0$.

3. $T_n$ admet une densité pour $n = 1$ ou 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : on suppose que $T_n$ est une variable à densité, dont une densité $f_n$ est donnée par :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = a^n\, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x}$ si $x \geqslant 0$ et 0 sinon.
   Les variables $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ sont indépendantes, donc $\Delta_{n+1}$ et $T_n$ sont indépendantes, par conséquent $T_{n+1}$ admet une densité définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, f(x-t)\, \mathrm{d}t$, et par le même raisonnement qu'à la question précédente, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t) \times f(x-t)\, \mathrm{d}t$ si $x \geqslant 0$ et 0 sinon.

   Soit $x \geqslant 0$ : $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x a^n\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,t} \times a\,\mathrm{e}^{-a\,(x-t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^x a^{n+1}\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x}\, \mathrm{d}t = a^{n+1}\,\mathrm{e}^{-a\,x}\left[\frac{t^n}{n!}\right]_0^x =$ $a^{n+1}\,\mathrm{e}^{-a\,x} \times \dfrac{x^n}{n!}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{f_n(x) = a^n\, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x} \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ si } x < 0}$$

## Partie II

1. Remarquons que $-\Delta_2(\Omega) = \mathbb{R}^-$, donc
   Pour $t \in \mathbb{R}$, $P(-\Delta_2 \leqslant t) = P(\Delta_2 \geqslant -t) = P(\Delta_2 > -t) = 1 - F_{\Delta_2}(-t)$, donc $g(t) = F'_{\Delta_2}(-t) = f_{\Delta_2}(-t)$.
2. $V_2$ est la somme des deux variables aléatoires indépendantes $W_1$ et $-\Delta_2$, donc admet une densité $h$ définie par :$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t$ car $f(t)$ est nulle pour $t < 0$.

   D'autre part, $g(x-t) = 0$ si $x - t > 0$, donc on est amené à distinguer deux cas :
   - $x \geqslant 0$ : $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} b\,\mathrm{e}^{-bt}\, a\,\mathrm{e}^{a(x-t)}\, \mathrm{d}t = \left[a\,b\,\mathrm{e}^{ax}\, \frac{\mathrm{e}^{-(a+b)\,t}}{a+b}\right]_x^{+\infty} = \frac{a\,b\,\mathrm{e}^{-b\,x}}{a+b}$
   - $x < 0$ : $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} b\,\mathrm{e}^{-bt}\, a\,\mathrm{e}^{a(x-t)}\, \mathrm{d}t = \left[a\,b\,\mathrm{e}^{ax}\, \frac{\mathrm{e}^{-(a+b)\,t}}{a+b}\right]_0^{+\infty} = \frac{a\,b\,\mathrm{e}^{a\,x}}{a+b}$
3. La probabilité que $V_2$ soit négatif est égale à $F_{V_2}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 h(t)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{a\,\mathrm{e}^{a\,t}}{a+b}\right]_{-\infty}^0 = \frac{a}{a+b}$

   La probabilité que $V_2$ soit positif est bien sûr égale à $1 - \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b}$ qui est aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$

**Partie III**

1. (a) Si $u < 0$, $F_2(u) = 0$ (le temps d'attente est nécessairement positif).

   (b) Le temps d'attente est nul si le premier client par avant l'arrivée du deuxième, c'est à dire $T_1 + W_1 \leqslant T_2$ ou encore $W_1 \leqslant T_2 - T_1 = \Delta_2$.

   On a donc bien $[U_2 = 0] = [W_1 - \Delta_2 \leqslant 0]$ et $P(U_2 = 0) = P(V_2 \leqslant 0 = \dfrac{b}{a+b}$ d'après la partie précédente.

   (c) De même, pour $u > 0$ fixé, $[U_2 \leqslant u]$ est réalisé si et seulement si l'attente est inférieure à $u$, c'est à dire nulle (événement $[U_2 = 0]$ étudié à la question précédente) ou strictement positive mais inférieure à $u$ ($[0 < W_1 - \Delta_2 \leqslant u]$)

   Par conséquent, pour $u > 0$, $F_2(u) = F_2(0) + F_{V_2}(u) - F_{V_2}(0) = \dfrac{b}{a+b} + \displaystyle\int_0^u \dfrac{a\,b\,\mathrm{e}^{a\,t}}{a+b}\mathrm{d}t = 1 - \dfrac{a}{a+b}\,\mathrm{e}^{-b\,u}$

   (d) $U_2$ n'est pas une variable à densité car $P\big(U_2 = 0\big) = \dfrac{b}{a+b} \neq 0$.

2. (a) L'espérance du temps de service est l'espérance de $S$, c'est à dire 3, puisque $S$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$, le temps de service moyen est de 2,52 pour la première simulation et de 3,73 pour la deuxième.

   (b) L'espérance du nombre de clients par unité de temps est l'inverse du temps d'attente moyen, soit $\frac{1}{\Delta - k} = a = 5$, les moyennes observées sont respectivement de $5,3$ et $4,7$ pour chacune des simulations.

   (c) Les quatre colonnes représentent pour chaque client : l'instant d'arrivée, son attente au guichet, la durée de service et le temps total passé.

3. (a) $[T_k \leqslant t]$ signifie que le $k^{\text{e}}$ client est déjà arrivé à l'instant $t$, donc le nombre $X_t$ de clients arrivés à cet instant est au moins égal à $k$ : $[T_k \leqslant t] = [X_t \geqslant k]$

   (b) Considérons dans un premier temps $k = 0$ : $[X_t > 0] = [T_1 \leqslant t]$, donc $P(X_t = 0) = \mathrm{e}^{-a\,t}$.

   Soit à présent $k \in \mathbb{N}^*$ : $P(X_t = k) = P(X_t \geqslant k) - P(X_t \geqslant k+1) = P(T_k \leqslant t) - P(T_{k+1} \leqslant t)$.

   Or d'après les calculs de la partie I, $P(T_k \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t a^k \,\frac{x^{k-1}\mathrm{e}^{-a\,x}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}x$ et

   $\displaystyle\int_0^t a^{k+1}\,\frac{x^k\mathrm{e}^{-a\,x}}{k!}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{a^k x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a\,x}\right]_0^t + \int_0^t a^k\,\frac{x^{k-1}\mathrm{e}^{-a\,x}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}x$, donc $P(X_t = k) = \dfrac{(a\,t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a\,t}$;

   $X_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $a\,t$

   (c) On peut donc simuler une loi de Poisson en simulant des sommes de variables exponentielles de même paramètre $a$ et en considérant $n$, le plus grand entier tel que $T_n \leqslant 1$. La variable $X$ ainsi définie suit une loi de Poisson de paramètre $a$.