Corrigé du devoir maison n^o 11

EXERCICE 1

1. • À l'instant $t = 1,5$, les machines 1, 3, 5 et 7 sont déjà tombées en panne.
   • Par conséquent le dispositif $\mathscr{D}_1$ est déjà tombé en panne (machine 1 en série avec la 2) ainsi que le dispositif $\mathscr{D}_3$ (machine 5 en panne et en série avec la 6, plus machine 7 en panne, en dérivation avec la série 5-6). Le dispositif $\mathscr{D}_2$ fonctionne toujours car seule la machine 3 est tombée en panne, or elle est en dérivation avec la 4 qui fonctionne toujours.

	$t=0$	$t=0,5$	$t=1$	$t=1,5$	$t=2$	$t=2,5$	$t=3$
D_1	1	1	1	0	0	0	0
D_2	1	1	1	1	0	0	0
D_3	1	0	0	0	0	0	0

   $\mathscr{D}_1$ est en panne dès que la première des deux machines 1 ou 2 l'est ; pour $\mathscr{D}_2$ il faut que les machines 3 et 4 soient en panne toutes les deux ; quant à $\mathscr{D}_3$ il faut 7 en panne ainsi que l'une des deux autres (5 ou 6).

2. Si M_1 n'a encore subi aucune panne, c'est que $X_1(\omega)$ est supérieur à l'intant considéré, soit $X_1(\omega) > t$.
   Soit $t \geqslant 0$, $P(X_1 \leqslant t) = 1 - P(X_1 > t) = 1 - q_t = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. De plus si $t < 0$ $P(X(1) \leqslant t) = 0$, on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) random représente la loi uniforme sur le segment $[0,1]$, et pour $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0,1]$ donc $P(X(1) \leqslant x) = P(\text{random} \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$. SI $x < 0$, alors $\mathrm{e}^{-\lambda x} > 1$ donc $P(X(1) \leqslant x) = 0$. Ainsi $X(1)$ est bien exponentielle de paramètre λ.
   (b) Lignes 8 à 11 : le dispositif est en panne dès qu'une des machines l'est, le temps d'attente pour la panne est donc le min des deux temps d'attente.
   Lignes 12 à 16 : le dispositif est en panne si les deux machines le sont, le temps d'attente pour la panne est donc le max des deux temps d'attente.
   (c) Lignes 16 à 25 : on regarde laquelle des deux machines 5 ou 6 tombe en panne en premier (min des deux temps d'attente) puis on compare avec la machine 7 (c'est le max du temps d'attente de 7 et du min de 5 et 6).
   (d) On effectue 10000 simulations, pour une loi exponentielle de paramètre 1, on obtient donc une valeur moyenne des temps d'attente sur ces 10000 simulations.

4. (a) • On a $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ donc $[Y_1 \geqslant t] = [X_1 \geqslant t] \cap [X_2 \geqslant t]$ et comme ces événements sont indépendants, $P\big(Y_1 \geqslant t\big) = P\big(X_1 \geqslant t\big) \times P\big(X_2 \geqslant t\big) = \big(1 - P(X_1 < t)\big) \times \big(1 - P(X_1 < t)\big)$
   Donc $P(Y_1 < t) = 1 - P(Y_1 \geqslant t) = 1 - \big(\mathrm{e}^{-t}\big)^2 = 1 - \mathrm{e}^{-2t}$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$.
   • $Y_2 = \max(X_3, X_4)$ donc $[Y_2 \leqslant t] = [X_3 \leqslant t] \cap [X_4 \leqslant t]$ et comme ces événements sont indépendants, $P\big(Y_2 \leqslant t\big) = P\big(X_3 \leqslant t\big) \times P\big(X_4 \leqslant t\big) = \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^2$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$.
   • $Y_3 = \max\big((X_7, \min(X_5, X_6)\big)$ donc $[Y_3 \leqslant t] = [X_7 \leqslant t] \cap [\min(X_5, X_6) \leqslant t]$.
   Or $P(\min(X_5, X_6) \leqslant t) = P(\min(X_1, X_2) \leqslant t)$ (mêmes lois) donc par indépendance de X_7 et de $\min(X_5, X_6)$, on obtient $P(Y_3 \leqslant t) = \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big) \times (1 - \mathrm{e}^{-2t})$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$.

$$\boxed{F_1,\ F_2 \text{ et } F_3 \text{ sont nulles sur } \mathbb{R}^- \text{ et } \forall t \geqslant 0,\ F_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{-2t},\ F_2(t) = \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big)^2 \text{ et } F_3(t) = \big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big) \times (1 - \mathrm{e}^{-2t})}$$

   (b) Les fonctions de répartitions de Y_1, Y_2, Y_3 sont continues sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (partout sauf en 0) donc ce sont des fonctions de répartition de variables à densité :
   • $f_1(t) = 2\,\mathrm{e}^{-2t}$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$
   • $f_2(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}\,(1 - \mathrm{e}^{-t})$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$
   • $f_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(1 - \mathrm{e}^{-2t}) + 2\,\mathrm{e}^{-2t}\big(1 - \mathrm{e}^{-t}\big) = \mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}$ si $t \geqslant 0$ et 0 si $t < 0$
   On reconnait une densité de loi exponentielle de paramètre 2 pour Y_1.
   (c) L'espérance de Y_1 vaut $\dfrac{1}{2}$ et sa variance $\dfrac{1}{4}$ (sans calcul nécessaire, résultat de cours).
   Sous réserve de convergence, $E(Y_2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,t\,\mathrm{e}^{-t}\,(1 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$
   Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A 2\,t\,\mathrm{e}^{-t}\,(1 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = \big[-2\,t\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-2t}\big]_0^A - \int_0^A \big(-2\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}\big)\,\mathrm{d}t$
   Donc $E(Y_2) = \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \big(-2\,A\,\mathrm{e}^{-A} + A\,\mathrm{e}^{-2A}\big) - \left(2\,\mathrm{e}^{-A} - \frac{\mathrm{e}^{-2A}}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

De même, $E(Y_3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t$

Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A t\left(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-2t} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\right]_0^A - \int_0^A \left(-\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t$

Donc $E(Y_3) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left(-A\,\mathrm{e}^{-A} - A\,\mathrm{e}^{-2A} + A\,\mathrm{e}^{-3A}\right) - \left(\mathrm{e}^{-A} + \frac{\mathrm{e}^{-2A}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-3A}}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$

Sous réserve de convergence, $E\big((Y_2)^2\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$

Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \left[-2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t} + t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^A - \int_0^A \left(-4\,t\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,t\,\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{d}t$

$= \left[-2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t} + t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^A - \left[4\,t\,\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^A + \displaystyle\int_0^A \left(4\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{d}t$

$E\big((Y_2)^2\big) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left(-2\,A^2\,\mathrm{e}^{-A} + A^2\,\mathrm{e}^{-2A}\right) - \left(4\,A\,\mathrm{e}^{-A} - A\,\mathrm{e}^{-2A}\right) + \left(4\,\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-2A}\right) + 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Donc $V(Y_2) = \dfrac{7}{4} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

Sous réserve de convergence, $E\big((Y_3)^2\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\left(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t$

Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A t^2\left(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} - 3\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t = \left[-t^2\,\mathrm{e}^{-t} - t^2\,\mathrm{e}^{-2t} + t^2\,\mathrm{e}^{-3t}\right]_0^A - \int_0^A \left(-2\,t\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,t\,\mathrm{e}^{-2t} + 2\,t\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t$

$= \left[-t^2\,\mathrm{e}^{-t} - t^2\,\mathrm{e}^{-2t} + t^2\,\mathrm{e}^{-3t}\right]_0^A - \left[2\,t\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-2t} - \dfrac{2\,t}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\right]_0^A + \displaystyle\int_0^A \left(2\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} - \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{d}t$

$E\big((Y_3)^2\big) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left(-A^2\,\mathrm{e}^{-A} - A^2\,\mathrm{e}^{-2A} + A^2\,\mathrm{e}^{-3A}\right) - \left(2\,A\,\mathrm{e}^{-A} + A\,\mathrm{e}^{-2A} - \frac{2\,A}{3}\,\mathrm{e}^{-3A}\right) + \left(2\,\mathrm{e}^{-A} + \mathrm{e}^{-2A} - \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-3A}\right) +$
$2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{41}{18}$

Donc $V(Y_3) = \dfrac{41}{18} - \left(\dfrac{7}{6}\right)^2 = \dfrac{11}{12}$

$$\boxed{E(Y_1) = \frac{1}{2} \quad V(Y_1) = \frac{1}{4} \quad E(Y_2) = \frac{3}{2} \quad V(Y_2) = \frac{5}{4} \quad E(Y_3) = \frac{7}{6} \quad V(Y_3) = \frac{11}{12}}$$

(d) Les résultats sont sensiblement conformes aux prévisions (espérances proches des moyennes simulées).

EXERCICE 2

1. On intègre par partie : $\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\,F(t)\Big]_0^x - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = x\,F(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$;

   or $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t - x\left[1 - F(x)\right] = x - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t - x + x\,F(x)$ d'où l'égalité.

2. (a) f est à valeurs positives et $x \in \mathbb{R}^+$; d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1) donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} x\,f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

   D'autre part, $E(X) - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{+\infty} x\,f(t)\,\mathrm{d}t$

   (b) $1 - F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc $x\,\Big(1 - F(x)\Big) = \displaystyle\int_x^{+\infty} x\,f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant E(X) - \varphi(x)$

   D'autre part $x\,\Big(1 - F(x)\Big) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant x\,\Big(1 - F(x)\Big) \leqslant E(X) - \varphi(x)$, et comme $E(X)$ existe,

   $E(X) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$. On conclut par le théoème d'encadrement *(dit des gendarmes)*.

3. (a) φ est une primitive de $x \mapsto x\,f(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc φ est dérivable et $\varphi'(x) = x\,f(x)$.
   f est une densité de probabilité, donc à valeurs positives, ainsi φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Pour tout $x \geqslant 0$, $x\,\Big(1 - F(x)\Big) \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$. φ est croissante majorée, donc admet une limite finie en $+\infty$, par conséquent X admet une espérance égale à cette limite.

4. X admet une espérance mathématique si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.