Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°2 - A remettre le mercredi 8 Octobre 2014

« Tri à Bulles - Moindres carrés - Espaces fonctionnels »

Informatique

Consultez à l'adresse INTERNET suivante : `http://www.youtube.com/watch?v=MtcrEhrt_K0` , l'animation présentant le tri à Bulles, puis écrire le script d'une fonction qui permette de trier une liste de réels L .

Devinette

On considére cinq points du plan dont les coordonnées : (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) sont définies par :

k	0	1	2	3	4
x_k	1	2	3	4	5
y_k	4	6	8	14	13

1. Exprimez en fonction des réels a et b la quantité $S(a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (y_k - ax_k - b)^2$

2. Nous allons pour cette seule question fixer b.
Exprimer en fonction de b le minimum de la fonction notéee $S_{\bullet b}$ qui à tout réel a associe le réel $S(a,b)$.

3. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles $S(a,b)$ est minimale et préciser cette valeur minimale.

Problème

1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2 - 1\right) f'(x) = 4\,x\,f(x). \qquad (\mathcal{E})$$

(a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Résolution sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Déterminer
- l'ensemble S_1 des solutions sur $]-\infty, -1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
- l'ensemble S_2 des solutions sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
- l'ensemble S_3 des solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

(c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

(d) Considérons alors la fonction $g : x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 1$, puis les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; $f_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } -1 < x < -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_3(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 1 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Représenter ces fonctions f_1, f_2 et f_3.
Justifier que la famille $\langle f_1,\ f_2,\ f_3\rangle$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

2. On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. On considère Φ l'application définie sur E de la façon suivante :

$$\forall P \in E,\ \Phi(P) = \left(X^2 - 1\right)\ P' - 4X\,P.$$

(a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le noyau de Φ.

(c) Démontrer que l'espace Image de Φ est

$$\operatorname{Im}\Phi = \left\{P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \Big/ c = 3a + 3e\right\}$$

(d) Justifier que l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)\, y' - 4\,x\,y = 3x^2 + x + 1$ admet une unique solution polynômiale de degré inférieur ou égal à trois. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur* $Im\,\Phi$ *et* $\ker \Phi$.

(e) On note $Q = 3X^2 + X + 1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$.
Déterminer P.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation « $\left(x^2-1\right)\, y' - 4\,x\,y = 3x^2 + x + 1$ ».
Constituent-elles un espace vectoriel ?