Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM N°2

« Tri à Bulles - Moindres carrés - Espaces fonctionnels »

Devinette

1. Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $(y_k - a\,x_k - b)^2 = y_k^2 + a^2\,x_k^2 + b^2 + 2\,a\,b\,x_k - 2\,a\,x_k\,y_k - 2\,b\,y_k$, donc

$$\sum_{k=0}^{4} (y_k - a\,x_k - b)^2 = \sum_{k=0}^{4} y_k^2 + a^2 \sum_{k=0}^{4} x_k^2 + 5\,b^2 + 2\,a\,b \sum_{k=0}^{4} x_k - 2\,a \sum_{k=0}^{4} x_k\,y_k - 2\,b \sum_{k=0}^{4} y_k$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{4} x_k = 15,\ \sum_{k=0}^{4} y_k = 45,\ \sum_{k=0}^{4} x_k^2 = 55,\ \sum_{k=0}^{4} y_k^2 = 481$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} x_k\,y_k = 161$ donc

$$\boxed{S(a, b) = 481 + 55\,a^2 + 5\,b^2 + 30\,a\,b - 322\,a - 90\,b}$$

2. Lorsque b est fixé, la somme est un polynôme de degré deux en a, donc dérivable et l'on a

$S'_{\bullet b}(a) = 110\,a + 30\,b - 322$ et $S'_{\bullet b}(a) \geqslant 0 \iff a \geqslant a_0 = \dfrac{161 - 15\,b}{55}$

$S_{\bullet b}$ est donc décroissante pour $a \leqslant a_0$ et croissante ensuite, donc atteint un minimum en ce point et $S_{\bullet b}(a_0) = 481 + \dfrac{(161 - 15\,b)^2}{55} + 5\,b^2 + \dfrac{30\,b\,(161 - 15\,b)}{55} - \dfrac{322\,(161 - 15\,b)}{55} - 90\,b = \dfrac{50\,b^2 - 120\,b + 534}{55}$

$$\boxed{a_0 = \frac{161 - 15\,b}{55} \qquad S_{\bullet b}(a_0) = \frac{50\,b^2 - 120\,b + 534}{55}}$$

3. $S_{\bullet b}$ est à nouveau un polynôme de degré deux en b, donc dérivable et $S'_{\bullet b}(b) = \dfrac{20\,b - 24}{11}$.

$S_{\bullet b}$ admet donc un minimum pour $b_0 = \dfrac{6}{5}$ et $S_{\bullet b}(b_0) = \dfrac{42}{5} = 8,4$

$$\boxed{b_0 = \frac{6}{5} \qquad S_{mini} = S_{\bullet b}(b_0) = \frac{42}{5}}$$

Problème

1. (a) Soit $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; c'est un espace vectoriel de référence et $\mathcal{S} \subset \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On va donc prouver que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $\mathcal{S} \neq \varnothing$ car la fonction nulle est un élément de $\mathcal{S}$.
- Soient f et g deux fonctions quelconques de $\mathcal{S}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:
  $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - 1)\,f'(x) = 4\,x\,f(x)$ et $(x^2 - 1)\,g'(x) = 4\,x\,g(x)$
  On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - 1)\big(\lambda\,f'(x) + g'(x)\big) = 4\,x\big(\lambda\,f(x) + g(x)\big)$ donc la fonction $\lambda\,f + g$ appartient à $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc bien un sous-espace de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

(b) Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{4\,x}{x^2 - 1}$ est $x \mapsto 2\,\ln\left|x^2 - 1\right|$ donc :

les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, -1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto K_1\,\exp\big(2\,\ln|x^2 - 1|\big) = K_1\,\big(x^2 - 1\big)^2$ où K_1 est une constante réelle quelconque.

La résolution sur les intervalles $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ se fait de façon similaire et l'on a :

les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]-1, 1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto K_2\,\big(x^2 - 1\big)^2$, $K_2 \in \mathbb{R}$.

les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto K_3\,\big(x^2 - 1\big)^2$, $K_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Soit f une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, -1[$ est donc un élément de $\mathcal{S}_1$, de même la restriction de f à $]-1, 1[$ appartient à $\mathcal{S}_2$, et sa restriction à $]1, +\infty[$ appartient à $\mathcal{S}_3$.

Ainsi, si f est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe 3 constantes réelles K_1, K_2, K_3 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} K_1\,\big(x^2 - 1\big)^2 & \text{si } x < -1 \\ K_2\,\big(x^2 - 1\big)^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ K_3\,\big(x^2 - 1\big)^2 & \text{si } 1 < x \end{cases} \qquad (\star)$$

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

On remarque que ces limites sont toutes nulles, quelles que soient les valeurs des constantes K_1, K_2, K_3.

Enfin f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en -1 et en 1, donc
$\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$.
On remarque à nouveau que ces limites sont nulles pour toutes valeurs de $K_1,\,K_2,\,K_3$.
Finalement f est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}\iff f$ est définie par $(\star)$ et $f(-1)=f(1)=f'(-1)=f'(1)=0$.

(d) On remarque que $f_1\in\mathcal{S}\,(K_1=1,\,K_2=K_3=0)$; de même pour f_2 et f_3.
Comme $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel, on a Vect $\langle f_1,\,f_2,\,f_3\rangle\subset\mathcal{S}$
D'autre part, d'après la question précédente toute solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $f_1,\,f_2$ et f_3. Donc $\mathcal{S}\subset$ Vect $\langle f_1,\,f_2,\,f_3\rangle$
Ainsi la famille $\langle f_1,\,f_2,\,f_3\rangle$ engendre $\mathcal{S}$, reste à vérifier que c'est une famille libre. Pour cela on résout $\alpha\,f_1+\beta\,f_2+\gamma\,f_3=0$ où $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$
On a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha\,f_1(x)+\beta\,f_2(x)+\gamma\,f_3(x)=0$
En particulier pour $x=0$: $f_1(x)=f_3(x)=0$ et $f_2(x)=1$ donc $\beta=0$.
En considérant $x=-2$ puis $x=2$ par exemple, on obtient alors $\alpha=0$ puis $\gamma=0$.

2. (a) Soit $P\in\mathbb{R}_4[X]$; P' est un polynôme donc $\Phi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes.
- Si $\deg(P)\leqslant3$, alors $\deg(P')\leqslant2$ d'où $\deg\big((X^2-1)\,P'\big)\leqslant4$, $\deg\big(X\,P\big)\leqslant4$ et $\deg\big(\Phi(P)\big)\leqslant4$.
- Si $\deg(P)=4$, soit a son coefficient dominant (coefficient du terme de degré 4) ; a priori, par un raisonnement analogue au cas d'un polynôme de degré $\leqslant3$, on a $\deg\big(\Phi(P)\big)\leqslant5$. On détermine alors le coefficient de degré 5 de $\Phi(P)$:
  P' est de degré 3 et son coefficient dominant vaut $4\,a$, c'est également le terme de degré 5 de $(X^2-1)\,P'$.
  $X\,P$ est de degré 5 et son coefficient dominant vaut a, donc le terme de degré 5 de $\Phi(P)$ est nul et $\Phi(P)\in E$.

On a prouvé que pour tout $P\in E,\ \Phi(P)\in E$; reste à établir la linéarité de Φ :
Soient P et Q deux polynômes de E et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\,P+Q)=(X^2-1)\,(\lambda\,P+Q)'-4\,X\,(\lambda\,P+Q)&=\lambda\big((X^2-1)\,P'-4\,X\,P\big)+(X^2-1)\,Q'-4\,X\,Q\\&=\lambda\Phi(P)+\Phi(Q)\end{aligned}$$
$$\boxed{\Phi\text{ est linéaire et à valeurs dans }E\text{ donc }\Phi\in\mathcal{L}(E)}$$

(b) Soit $P\in E,\ P\in\ker(\Phi)\iff\Phi(P)=0$ (polynôme nul). Un polynôme peut être vu comme une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après l'étude précédente $P\in\mathcal{S}$.
En particulier, il existe $K_1\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in]-\infty,-1[,\ P(x)=K_1\,(x^2-1)^2$ et comme P est un polynôme, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=K_1\,(x^2-1)^2$, d'où $K_1=K_2=K_3=K$.
$$\boxed{\ker(\Phi)=\text{Vect}\langle(X^2-1)^2\rangle}$$

(c) $\text{Im}(\Phi)$ est engendré par les images des vecteurs de la base canonique par exemple ; or
$\Phi(1)=-4\,X,\ \Phi(X)=-3\,X^2-1,\ \Phi(X^2)=-2\,X^3-2\,X,\ \Phi(X^3)=-X^4-3\,X^2,\ \Phi(X^4)=-4\,X^3$.
$2\,\Phi(X^2)=\Phi(1)+\Phi(X^4)$ donc $\text{Im}(\Phi)=\text{Vect}\langle X,\,3\,X^2+1,\,X^4+3\,X^2,\,X^3\rangle$
$$\begin{aligned}P\in\text{Im}(\Phi)\iff\exists(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)\in\mathbb{R}^4\text{ tels que }P&=\alpha\,X+\beta\,(3\,X^2+1)+\gamma\,(X^4+3\,X^2)+\delta\,X^3\\&=\beta+\alpha\,X+(3\,\beta+3\,\gamma)\,X^2+\delta\,X^3+\gamma\,X^4\end{aligned}$$
Tout polynôme de E s'écrit $P=a\,X^4+b\,X^3+c\,X^2+d\,X+e$, où $(a,\,b,\,c,\,d,\,e)$ sont des réels quelconques donc $P\in\text{Im}(\Phi)\iff c=3\,\beta+3\,\gamma=3\,a+3\,e$

(d) Déterminer une solution polynômiale de $\big(x^2-1\big)\,y'-4\,x\,y=3x^2+x+1$ revient à déterminer un antécédent par Φ du polynôme $3\,X^2+X+1$.
Ce polynôme est tel que $a=b=0,\ c=3,\ d=e=1$, on a bien $c=3=3\,a+3\,e$ donc $3\,X^2+X+1\in\text{Im}(\Phi)$.
$Q=3\,X^2+X+1$ admet bien des antécédents par Φ, et deux antécédents P_1 et P_2 de Q sont tels que $P_2-P_1\in\ker(\Phi)$, donc $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P_2=P_1+\lambda\,(X^2-1)^2$.
Donc P_1 étant donné, il existe une unique valeur de λ telle que $P_1+\lambda\,(X^2-1)^2$ soit de degré $\leqslant3$.

(e) On résout $\Phi(P)=Q=3\,X^2+X+1$ avec $\deg(P)\leqslant3$: soit $P=a\,X^3+b\,X^2+c\,X+d$,
$$\begin{aligned}\Phi(P)&=-a\,(X^4+3\,X^2)-2\,b\,(X^3+X)-c\,(3\,X^2+1)-4\,d\,X=3\,X^2+X+1\\&=-a\,X^4-2\,b\,X^3-3\,(a+c)\,X^2-2\,(b+2\,d)\,X-c\text{ d'où par identification}\end{aligned}$$
$$a=b=0,\ c=-1\text{ et }d=-\tfrac14\text{ donc }\boxed{P=-X-\tfrac14}$$

3. D'après la remarque faite à la question 2d et le principe de superposition, toute solution s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale de $\mathcal{E}$.
Les solutions sont donc toutes les fonctions $\alpha\,f_1+\beta\,f_2+\gamma\,f_3+P$, où $(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et $P:\ x\mapsto-x-\frac14$ est la fonction polynômiale associée à l'antécédent calculé à la question 2e

L'ensemble des solutions n'est pas un espace vectoriel car la fonction nulle n'en fait pas partie.