Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne
DM N°5 - A remettre le mercredi 17 octobre 2012
« Algèbre linéaire : Endomorphismes nilpotents - Équations matricielles »

Etude d'endomorphisme u tel que $u \circ u = 0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme **non nul** de E tel que $u \circ u = 0$.
r désigne le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1. (a) Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

(b) En déduire que $r \leq \dfrac{n}{2}$ et $p \geq \dfrac{n}{2}$.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

(a) Justifier que $\text{Im } u = \text{Ker } u$.

(b) Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur non nul appartenant à $\text{Im } u$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur tel que $u\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i}$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

3. Pour cette question, on suppose $n = 3$.

(a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } u$?

(b) Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur de E n'appartenant pas à $\text{Ker } u$ et $\overrightarrow{i} = u\left(\overrightarrow{j}\right)$.
Justifier l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{k}$ de $\text{Ker } u$, non colinéaire à $\overrightarrow{i}$ puis démontrer que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de E.

(c) Déterminer la matrice de u dans cette base.

4. Pour cette question, on suppose $n = 4$.

(a) Montrer que r vaut 1 ou 2. Préciser dans chaque cas la dimension de $\text{Ker } u$?

(b) Examinons le cas $r = 2$
Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$ une base de $\text{Im } u$, puis $\overrightarrow{j}, \overrightarrow{\ell}$ deux vecteurs de E tels que : $\overrightarrow{i} = u\left(\overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{k} = u\left(\overrightarrow{\ell}\right)$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$ est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.

(c) Examinons le cas $r = 1$.
Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur de E n'appartenant pas à $\text{Ker } u$ et $\overrightarrow{i} = u\left(\overrightarrow{j}\right)$.
Justifier l'existence de deux vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{\ell}$ de $\text{Ker } u$ tels que $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{\ell}$ soient linéairement indépendants.
Montrer que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$ est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.

Application à un exemple

On rappelle que $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

Dans cette partie, I_4 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et J la matrice définie par:

$$J = \begin{pmatrix} 10 & 17 & -14 & -9 \\ 4 & 8 & -6 & -4 \\ 12 & 18 & -16 & -10 \\ 0 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est J.

(a) Vérifier que $v \circ v = 0$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de v. Préciser leur dimension.

(c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle v ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$..

Dans la suite, on notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à $\mathcal{B}$.

2. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ \quad (m \in \mathbb{R})$.

(a) Démontrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.

(b) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

3. Soit $M = I + mJ$ où m est un réel non nul.
On se propose de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ solutions de l'équation (1) : $X^2 = M$.

(a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

(b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, $\quad N$ désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

(d) Soit Y une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ solutions de (2).
Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est nécessaire de la forme $\begin{pmatrix} a\,I_2 + b\,J_2 & c\,I_2 + d\,J_2 \\ e\,I_2 + f\,J_2 & g\,I_2 + h\,J_2 \end{pmatrix}$ où I_2 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera que celle-ci admet une infinité de solutions dont on précisera la forme.

(f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide la matrice P (aucun calcul explicite n'est demandé)